前　言

由于科学技术的迅速发展，特别是计算机的普遍使用，使得理工科大学、财经院校对高等代数和线性代数提出了更高、更新的要求．而教科书受教学时数限制，只能介绍一些基本理论和基本方法．我们编写这本书先概述主要内容，再侧重于教科书中未涉及或强调不够的部分，比如本书对广义逆矩阵、*M*矩阵作了介绍，并对循环阵、幂零阵、幂幺阵、幂等阵、置换阵等作了较系统的叙述．

全书共分十一章，它们是：行列式、线性方程组、矩阵、多项式、线性空间、特征值和特征向量、二次型、矩阵的几种标准形、线性变换、欧氏空间与酉空间、广义逆矩阵与*M*矩阵．本书每节按内容提要、答疑辅导、题型归类三部份编写．每章有一节综合题．

本书收入了五大生（电大、函大、职大、夜大、自修大）试题，以及国内外（中、美、苏、日、澳）研究生试题和数学竞赛题．我们在研究成千上万个各类试题的基础上，花了很大的精力，对它们作了双向归纳．一是对题型作了归纳；一是对每一题型的各种不同的解法作了归纳．不仅可使初学者对高等代数方法，有一个较全面和系统的轮廓，而且对数学方法的训练也有一定的帮助．

本书特点是：内容新，观点新，针对性强，适应面广．因此可供各类大学本科生、专科生、研究生和教师参考，也可供其它科技工作者阅读．

本书由钱吉林和陈良植主编，编委是（按姓氏笔划）：

刘文浩　刘代芳　刘恒　叶启云　刘富贵　伍毅　陈良植　余尚智　周长菊　杨谦　胡友思　夏建军　张莲珠　赵德修　钱吉林　郭海根　黄光谷　彭先髦　曾祥金　穆汉林　戴定春．

本书编写得到华中师范大学副校长邓宗琦教授和数学系领导的关心，还得到华中师范大学科研处的支持，我们对他们表示衷心地感谢．

编　者

90.4.

目　　录

第一章 行 列 式

§1 定义与性质

（一）内容提要

1．由 $1,2,\cdots,n$ 组成的不同的 n 级排列共有 $n!$ 个，其中奇排列数有 $\frac{n!}{2}$ 个，偶排列数也是 $\frac{n!}{2}$ 个.

2．任一 n 级排列 $i_1\ i_2\ \cdots i_n$ 都可以经过 t 次两两对换变为自然排列 $1\ 2\ \cdots\ n$，而且 t 与逆序数 $\tau(i_1\ i_2\ \cdots\ i_n)$ 具有相同的奇偶性.

3．$\tau(n\ \ n-1\ \cdots\ 2\ \ 1)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

4．设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，则

$$\begin{aligned}|A|=|A'|&=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\&=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}\\&=\sum(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.\end{aligned}$$

5．
$$\begin{vmatrix}a_1 & & * \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots\ a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n=\begin{vmatrix}a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ * & & \ddots\ a_n\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}* & & b_1 \\ & ⋰ & \\ b_n & & 0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}b_1\cdots b_n=\begin{vmatrix}0 & & b_1 \\ & ⋰ & \\ b_n & & *\end{vmatrix}$$

6．若行列式某两行(列)成比例，或者某一行(列)全为零，则行列式等于 0 .

7．把两行(列)互换，行列式值反号．

8．行列式可按某一行(列)展开，即行列式等于某一行(列)元素与其相应代数余子式之积之和．

行列式可用拉普拉斯公式展开．

9．
$$\begin{vmatrix} \cdots & a_1+b_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_n+b_n & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & a_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & a_n & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & b_1 & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_n & \cdots \end{vmatrix}$$

其中…部分在等式两边不变．

10．把某一行(列)的倍数加到另一行(列)上去，行列式值不变．

11．一个数乘行列式某一行(列)，等于此数乘此行列式．

（二）答疑辅导

1．行列式通常有哪几种定义？

答　通常有以下六种定义：

(1) n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 $|A|$ 指的是一切取自 A 的不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1}$$

的代数和 ($j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列)．当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，项 (1) 带正号；当它是奇排列时，项 (1) 带负号．

(2) n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 $|A|$ 指的是项 (1) 的代数和．当 $v_n(j_1j_2\cdots j_n)>0$ 时，项 (1) 带正号；当 $v_n(j_1j_2\cdots j_n)>0$ 时，项(1)带负号．这里 $v_n(j_1j_2\cdots j_n)=\prod\limits_{1<t<r<n}(j_r-j_t)$，且规定 $v_1(1)>0$．

(3) n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式指的是项 (1) 的代数和．项 (1) 的符号这样确定：逐次对换 A 的两行或两列，把

项 (J)的 n 个元素移到主对角线上时，如果新作对换的个数是偶数，这项带正号；所作对换的个数是奇数，这项带负号.

(4) n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 $|A|$ 是适合下列条件的一个函数：

1) $|A|$ 是 A 的每列的线性函数；

2) 当 A 有两列相同时，$|A|=0$；

3) 当 $a_{ii}=1$ 而 $a_{ij}=0(i\neq j)$ 时，$|A|=1$.

(5) 逐次用一行或一列的倍数加到另一行或一列，把 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 化成对角阵，记主对角线上元素为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 则 $|A|=a_1a_2\cdots a_n$.

(6) 一阶方阵的行列式定义为这个方阵的元素本身. 设 $n-1$ 阶方阵的行列式已经定义，则 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式 $|A|$ 定义为

$$|A|=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

其中 M_{ij} 表示划去 A 中第 i 行和第 j 列剩下的 $n-1$ 阶方阵的行列式.

以上 6 种定义是等价的（见[31]）.

2. 下面等式对不对？

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ m+n & s+t \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ m & s \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & d \\ n & t \end{vmatrix}.$$

答　一般不对. 正确应拆成 4 个行列式之和，即

原式左端=

$$\begin{vmatrix} a & c \\ m & s \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & d \\ m & t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & c \\ n & s \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & d \\ n & t \end{vmatrix}.$$

（三）题型归类

1. 计算逆序数

例1 设 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)=s$，求 $\tau(i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1)$.

解 取两个固定的 i_k, i_m，则它们在且仅在下面两个排列

$$i_1i_2\cdots i_n \quad 或 \quad i_n\cdots i_2i_1$$

之一构成逆序数．因此

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(i_n\cdots i_2i_1)=C_n^2.$$

由假设，则 $$\tau(i_n\cdots i_2i_1)=C_n^2-s.$$

2．用定义(或性质)直接计算或证明

例2 试证：n 阶行列式中零元素的个数如果多于 n^2-n 个，则此行列式等于零.

证 每个 n 阶列式由 n^2 个元素组成，如果其中零元素多于 n^2-n 个，则非零元素的个数少于 n 个．则此行列式中至少有一行(或列)为零，故这个行列式等于0.

例3 讨论下面两个行列式的关系：

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}.$$

解 将 D_2 的最后一行逐次与上行交换，经 $n-1$ 次换到第1行．再将新行列式的最后一行(即 D_2 中原来倒数第2行)逐次与上一行交换，经 $n-2$ 次换到第2行．如此继续下去，直到得出 D_1 为止，共交换次数为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\therefore \quad D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_1.$$

§2 计算行列式的方法

(一) 内容提要

计算行列式，方法多，技巧大．但也有一定规律可循．

其基本思路是：化零，降阶，灵活运用性质和一些公式.

基本计算方法我们将在下面题型归类中介绍.

（二）答疑辅导

1. 行列式有哪些降阶定理？

答　有下面几个

(1) 第一降阶定理 (Schur) 设 A 和 D 分别为 n 阶和 m 阶方阵，则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{cases} |A|\cdot|D-CA^{-1}B| & (\text{当 } A \text{ 可逆时}) \\ |D|\cdot|A-BD^{-1}C| & (\text{当 } D \text{ 可逆时}). \end{cases} \quad (1)$$

公式 (1) 的证明，由下面两个等式两端取行列式即可.

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} E & -BD^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

(2) 第二降阶定理　设 n 阶可逆阵 A 和 m阶可逆阵D，B 和 C 分别为 $n\times m$ 和 $m\times n$ 阵，则

$$|D-CA^{-1}B| = \frac{|D|}{|A|}|A-BD^{-1}C|. \quad (2)$$

公式(2)可由公式(1)直接推出.

(3) 第三降价定理　设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的某一个 k 阶顺序主子式 $\Delta_k \neq 0$，则

$$|A| = |S|/\Delta_k^{n-k-1}. \quad (3)$$

其中

$$S = \begin{pmatrix} S_{k+1,k+1} & \cdots & S_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n,k+1} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} \text{称为 Sylvester 矩阵}$$

$$S_{ij} = \left| A\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots k i \\ 1 & 2 \cdots k j \end{pmatrix} \right| \qquad i, j = k+1, \cdots n \quad (4)$$

记号 $A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots & i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix}$表示从 A 中取第 $i_1, i_2\cdots, i_k$ 行和第$j_1, j_2\cdots j_k$ 列作成的子矩阵.

我们来证明(3)式. 将 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} & B \\ C & A\begin{pmatrix} k+1\cdots n \\ k+1\cdots n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

则由第一降阶定理

$$|A| = \Delta_k \left| A\begin{pmatrix} k+1\cdots n \\ k+1\cdots n \end{pmatrix} - CA\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots k \\ 1 & 2\cdots k \end{pmatrix}^{-1} B \right| \quad (5)$$

令

$$\begin{pmatrix} d_{k+1,k+1} \cdots d_{k+1,n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ d_{n,k+1} \quad \cdots d_{nn} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} k+1\cdots n \\ k+1\cdots n \end{pmatrix} - CA\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots k \\ 1 & 2\cdots k \end{pmatrix}^{-1} B \quad (6)$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad B = (\beta_{k+1}, \cdots \beta_n)$$

则由第二降阶定理可得

$$d_{k+1,k+1} = a_{k+1;k+1} - \alpha_{k+1} A\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots k \\ 1 & 2\cdots k \end{pmatrix}^{-1} \beta_{k+1}$$

$$= \frac{1}{\Delta_k} \begin{vmatrix} A\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots k \\ 1 & 2\cdots k \end{pmatrix} & \beta_{k+1} \\ \alpha_{k+1} & a_{k+1;k+1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta_k} \left| A\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots k+1 \\ 1 & 2\cdots k+1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\Delta_k} S_{k+1,k+1}$$

类似可证

$$d_{ij}=\frac{1}{\Delta_k}S_{ij}\quad (i,j=k+1,\cdots n)\tag{7}$$

则由(5)、(6)、(7)式得

$$|A|=\frac{1}{\Delta_k^{n-k-1}}|S|.$$

（4）第四降阶定理　设 A,B,C,D 均为 n阶方阵，且 $AC=CA$，则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

证明见本书p.93第三章§4例1.

2．什么叫爪型行列式？

答　形如

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & c_2 & & & \\ b_3 & & c_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_n & & & & c_n \end{vmatrix}=\left|\,\overline{\diagdown}\,\right|$$

的行列式称为爪型行列式．按第1列展开，可得

$$D=a_1c_2\cdots c_n-a_2b_2c_3\cdots c_n-\sum_{i=3}^{n}a_ib_ic_2\cdots c_{i-1}c_{i+1}\cdots c_n.$$

3．什么叫滑梯型行列式？

答　形如

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ c_1 & b_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-2} & \\ & & & \ddots & \\ & & & c_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}=\left|\,\overline{\diagdown\diagdown}\,\right|$$

行列式称为滑梯型行列式.

当 $b_1b_2\cdots b_{n-1}=0$ 时，D_n 可以降阶算出.

当 $b_1b_2\cdots b_n\neq 0$ 时，则

$$D_n=mb_1b_2\cdots b_{n-1}, \tag{8}$$

其中 $m=a_0-a_1\dfrac{c_1}{b_1}+a_2\dfrac{c_1c_2}{b_1b_2}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{c_1c_2\cdots c_n}{b_1b_2\cdots b_{n-1}}$.

上面 (8) 式的证明，只要以 D_n 第 n 列的 $-\dfrac{c_{n-1}}{b_{n-1}}$ 倍加到第 $n-1$ 列，再以第 $n-1$ 列的 $-\dfrac{c_{n-2}}{b_{n-2}}$倍加到第 $n-2$ 列，…，最后以第2列的 $-\dfrac{c_1}{b_1}$倍加到第1列，即可证明.

4．什么叫三对角行列式？

答 形如

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & & \\ c & a & \ddots & b \\ & \ddots & \ddots & \\ & & c & a \end{vmatrix}$$

的 n 阶行列式称为三对角行列式．则

$$D_n=\begin{cases} \dfrac{(a+\sqrt{\Delta})^{n+1}-(a-\sqrt{\Delta})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{\Delta}} & \text{当 } \Delta\neq 0 \text{ 时} \\ (n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n & \text{当 } \Delta=0 \text{ 时} \end{cases} \tag{9}$$

其中 $\Delta=a^2-4bc$．下面来证明 (9)式(南京大学研究生入学试题)．令 α，β 是 $x^2-ax+bc=0$的两个根，再将 D_n 按第1列展开得

$$D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})=\alpha^2(D_{n-2}-\beta D_{n-3})$$

$$=\cdots=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1)=\alpha^n \tag{10}$$

类似有

$$D_n - aD_{n-1} = \beta^n. \quad (11)$$

当 $\Delta \neq 0$ $(\alpha \neq \beta)$ 时，由 (10)，(11) 解出

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{(a+\sqrt{\Delta})^{n+1} - (a-\sqrt{\Delta})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{\Delta}}.$$

当 $\Delta = 0$ $(\alpha = \beta)$ 时，则 (11) 式为

$$D_n = \alpha D_{n-1} + \alpha^n = \alpha(\alpha D_{n-2} + \alpha^{n-1}) + \alpha^n$$

$$= \cdots = (n+1)\alpha^n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

5. 什么叫循环行列式？

答　形如

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

的行列式称为循环行列式。则

$$D_n = f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \cdots f(\varepsilon_n) \quad (12)$$

其中 $f(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$，而 $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n$，为 $x^n - 1$的全部根．(12)式证明见p.101第三章§5的答疑辅导5。

6. 什么叫反循环行列式？

答　形如

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

的行列式称为反循环行列式，则

$$D_n = f(\eta_1) f(\eta_2) \cdots f(\eta_n) \quad (13)$$

其中 $f(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$，而 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 为 $x^n + 1$ 的全部根．此式证明类似于 (12) 式．

7. 什么叫对称行列式?

答　形如

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a \\ a & x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

的行列式，称为对称行列式.

当 $x_i=a$ 时很容易算出 D.

当 $x_i \neq a$ $(i=1,2,\cdots n)$ 时，则

$$D=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{x_i-a}\right) \tag{14}$$

实际上，将 D 升阶为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_1 & a & \cdots & a \\ 0 & a & x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x_1-a & & & \\ & & \ddots & & \\ -1 & & & & x_n-a \end{vmatrix}.$$

成为爪型行列式。则由上面已知公式即可证得（14）式.

8. 什么叫柯西（Cauchy）行列式?

答　形如

$$D_n=\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

的行列式，称为柯西行列式。则

$$D_n=\prod_{1<j<i<n}(a_i-b_j)(b_i-b_j)\Big/\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j). \tag{15}$$

（15）式证明方法是，从 D_n 的第1行提出因子 $\frac{1}{a_1+b_1}$

再将第1列分别乘以 $-\frac{a_1+b_1}{a_1+b_j}$ $(j=2,3,\cdots,n)$ 后，再分别加到第$2,\cdots,n$列，得

$$D_n=\frac{\prod\limits_{i=2}^{n}(a_i-a_1)(b_i-b_1)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_1)\prod\limits_{i=2}^{n}(a_1+b_i)}D_{n-1}.$$

然后用递推方法可得（15）式.

9．什么叫柯西—皮内（Cauchy—Binet）公式？

答　柯西—皮内公式叙述如下：设 A 是 $n\times m$ 阵，B 是 $m\times n$ 阵则

$$|AB|=\begin{cases}\sum\limits_{1\leqslant j_1<\cdots<j_n\leqslant m}\left|A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\j_1&j_2&\cdots&j_n\end{pmatrix}\right|\cdot\left|B\begin{pmatrix}j_1&j_2&\cdots&j_n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}\right| & \text{当 } n\leqslant m\\ 0 & \text{当 } n>m\end{cases}$$

下面来证明．当 $n>m$ 时，由第一降阶定理

$$\begin{vmatrix}E&B\\-A&0\end{vmatrix}=|0-(-A)EB|=|AB| \qquad (16)$$

将（16）式左端行列式用拉普拉斯展开，按它的最后 n 列展开，任取 n 行所成的 n 阶子式中，至少有 $n-m$ 个行全为零，从而$|AB|=0$.

当 $n\leqslant m$ 时，对 A，B 分块如下

$$A=(A_1,A_2)\qquad B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$$

其中 $A_1=A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}$，$B_1=B\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}$．令 E_m 为 m 阶单位阵，考虑 $m+n$ 阶行列式

$$D=|AB|=\begin{vmatrix} E_m & B \\ -A & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E_n & 0 & B_1 \\ 0 & E_{m-n} & B_2 \\ -A_1 & -A_2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{17}$$

不难算出$|B_1|$在 D 中代数余子式为

$$(-1)^{\sum_{k=1}^{k}[k+(m+k)]}\begin{vmatrix} 0 & E_{m-n} \\ -A_1 & -A_2 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{mn}\begin{vmatrix} 0 & E_{m-n} \\ -A_1 & -A_2 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{mn}(-1)^{\sum_{k=1}^{n}[(m-n+k)+k]}|-A_1|\cdot|E_{m-n}|$$

$$=|A_1|.$$

要想按（17）式右端后 n 列展开，还需求任一 n 阶子式 $\left|B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}\right|$的代数余子式，将行列式$\begin{vmatrix} E_m & B \\ -A & 0 \end{vmatrix}$的子块（$E_m,B$）中第 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 行，依次调到第 $1,2,\cdots,n$ 行的位置，同时将子块$\begin{pmatrix} E_m \\ -A \end{pmatrix}$中 A 的第 $j_1,\cdots,j_n$ 列依次调到第$1,2,\cdots,n$ 列的位置．则得

$$D=\begin{vmatrix} E_n & 0 & B_3 \\ 0 & E_{m-n} & B_4 \\ -A_4 & -A_3 & 0 \end{vmatrix} \tag{18}$$

其中 $A_4=A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$，$B_3=B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

按上面证明知$|B_3|$的代数余子式为$|A_4|$．故得证

$$|AB|=\sum\left|A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}\right|\cdot\left|B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}\right|.$$

(三) 题型归类

行列式的计算方法，常可分成下列诸情形.

1. 化成三角形

例1 (天津师大研究生入学试题) 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots\cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots\cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots\cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

解 将各列加到第1列，并提出公因子得

$$D_n=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$=(\sum x_i-m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}m^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right).$$

2. 将一行（列）的倍数加到另一行（列）

例 2 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \end{vmatrix}$$

解 从第 $n-1$ 行开始，将上一行的 (-1) 倍加到下一行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\begin{cases} -1 & \text{当 } n=2\text{时} \\ 0 & \text{当 } n>2\text{时}. \end{cases}$$

例 3 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n\\ 1+x_1y_2 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n\end{vmatrix}$$

解 将第1列的（-1）倍加到其它各列得

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & x_1(y_2-y_1) & \cdots & x_1(y_n-y_1)\\ 1+x_2y_1 & x_2(y_2-y_1) & \cdots & x_2(y_n-y_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1+x_ny_1 & x_n(y_2-y_1) & \cdots & x_n(y_n-y_1)\end{vmatrix}$$

$$\therefore\quad D_n=\begin{cases}(x_2-x_1)(y_2-y_1) & \text{当 } n=2\text{时}\\ 0 & \text{当 } n>2\text{时}.\end{cases}$$

3. 加边法（升阶法）

例 4 （郑州大学，河北师大研究生入学试题）计算

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a_2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & \cdots & n+a_n\end{vmatrix}$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq0$。

解

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 2 & 2+a_2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & n & n & \cdots & n+a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

将第二列乘$\frac{1}{a_1}$，第3列乘$\frac{2}{a_2}$，…，第$n+1$列乘$\frac{n}{a_n}$，统统加到第1列得

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{n}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n}\right)a_1a_2\cdots a_n$$

例 5 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}.$$

解 添加一行一列，得

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^3 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$$

按最后一列展开，得

$$f(x)=A_{55}x^4+A_{45}x^3+A_{35}x^2+A_{25}x+A_{15}.$$

其中 A_{ij} 为行列式 $f(x)$ 中第 i 行第 j 列元之代数余子式。特别 $D=-A_{45}$.

由范德蒙行列式

$$A_{55}=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

又 $$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=0,$$

故 a,b,c,d 是 $f(x)$ 的 4 个根．不妨设它们互不相等(否则，立即可得 $D=0$)，由韦达定理有

$$a+b+c+d=-\frac{A_{45}}{A_{55}}=\frac{D}{A_{55}},$$

$$\therefore\quad D=(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

4．拆成两个行列式之和

例 6 (安徽大学研究生入学试题)计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解 将第 n 列写成两项和：

$$y=y+0\qquad x=y+(x-y)$$

则 D_n 可写成两个行列式之和

$$D_n=(x-y)D_{n-1}+C\tag{1}$$

其中

$$C=\begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ z & x & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ z-x & x-y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z-x & z-y & \cdots & z-y & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} z-x & x-y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ z-x & z-y & x-y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z-x & z-y & z-y & \cdots & z-y & x-y \\ z-x & z-y & z-y & \cdots & z-y & z-y \end{vmatrix}$$

从倒数第二行开始，每一行的(-1)倍加到下一行则

$$C=(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} z-x & x-y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z-x & x-y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z-x & x-y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & z-x \end{vmatrix}$$

$$\therefore \qquad C=y(x-z)^{n-1}.$$

代入(1)式

$$D_n=(x-y)D_{n-1}+y(x-z)^{n-1}. \qquad (2)$$

类似可得

$$D_n=(x-z)D_{n-1}+z(x-y)^{n-1}. \qquad (3)$$

则当$y\neq z$时，由(2)，(3)可解得

$$D_n=\frac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}.$$

当$y=z$时，直接从原行列式可算出

$$D_n=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}.$$

5．表成两个行列式之积

例 7 计算

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

解 令$D=|A|$，由于$D=|A'|$

$$D^2=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

$$=|\mathrm{diag}(\delta,\delta,\delta,\delta)|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4,$$

$$\therefore \qquad D=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

其中 $\delta=a^2+b^2+c^2+d^2$.

例 8 （厦门大学研究生入学试题） 设多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \quad (a_0\neq 0)$$

的 n 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 称

$$D(f)=a_0^{2n-2}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\alpha_i-\alpha_j)^2 \tag{1}$$

为 $f(x)$ 的判别式，证明：$f(x)$ 有重根的充要条件是

$$N\doteq\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

其中 $s_k=\alpha_1^k+\alpha_2^k+\cdots+\alpha_n^k \quad (k=0,1,2,\cdots)$.

证 因为

$$N=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\alpha_i-\alpha_j)^2.$$

从而可证 $f(x)$ 有重根的充要条件是 $N=0$.

6. 作辅助函数或辅助行列式

例 9 （上海交大研究生入学试题） 设 n 为一正整数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个实数，$f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 为 n 个次数不大于 $n-2$ 的实系数多项式，求证

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(a_1) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}=0. \tag{1}$$

证 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有两个数相等时，(1) 式显然成立. 今设它们互不相等，作辅助行列式

$$F(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

用反证法，若 $F(x)\neq 0$ 则 $\partial F(x)\leqslant n-2$，但它有 $n-1$ 个不同根为 $a_2,\cdots,a_n$，矛盾. 从而 $F(x)=0$. 这样特别有

$$F(a_1)=\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}=0$$

7. 分离线性因子

例 10 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

解 将 $x=\pm 1, \pm 2$ 代入，易知行列式值为0. 故 D 含有4个1次因式：

$$(x-1),\quad (x+1),\quad (x-2),\quad (x+2)$$

故可设

$$D=A(x-1)(x+1)(x-2)(x+2). \qquad (1)$$

令 $x=0$ 代入(1)式两端，可算出 $A=-3$. 所以

$$D=-3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

8. 归纳法

例 10 证明：当 $\alpha\neq m\pi$ 时

$$D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

证 当 $n=1$ 时，结论显然成立.

归纳假设结论对 $\leqslant k-1$ 成立，则

$$D_{k-1}=\sin k\alpha/\sin\alpha.$$

当 k 时，将 D_k 按第一行展开，得

$$D_k=2\cos\alpha D_{k-1}-D_{k-2}=\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin\alpha}.$$

结论对 k 也成立，从而对一切自然数成立.

9. 递推法

例 11 （广西大学，兰州大学研究生入学试题）计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

解 按最后一行展开得

$$D_n=2\cos\theta D_{n-1}-D_{n-2}. \tag{1}$$

令 $\alpha+\beta=2\cos\theta$，$\alpha\beta=1$，则

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2},$$

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$$

$$=\cdots=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1). \tag{2}$$

$$D_2=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta,\quad D_1=\cos\theta.$$

$$D_n=\alpha D_{n-1}+\beta^{n-2}(\cos 2\theta-\alpha\cos\theta) \tag{3}$$

同理

$$D_n=\beta D_{n-1}+\alpha^{n-2}(\cos 2\theta-\beta\cos\theta) \tag{4}$$

以 α，β 为根作 2 次方程

$$y^2-2\cos\theta\, y+1=0. \tag{5}$$

判别式 $\Delta=4\cos^2\theta-4$

1）当 $\cos\theta=1$ 时，由(5)知 $\alpha=\beta=1$，则

$$D_n=D_{n-1}=\cdots=D_1=1$$

2）当 $\cos\theta=-1$ 时，由(5)知 $\alpha=\beta=-1$，则

$$D_n=-D_{n-1}=\cdots=(-1)^{n-1}D_1=(-1)^n.$$

3）当 $\cos\theta\neq\pm1$ 时，$\Delta\neq0$ 则 $\alpha\neq\beta$. 由(3)，(4) 解出

$$D_n=\frac{\beta^{n-1}(\cos 2\theta-\alpha\cos\theta)-\alpha^{n-1}(\cos 2\theta-\beta\cos\theta)}{\beta-\alpha} \tag{6}$$

但由(5)式解出

$$\alpha=e^{i\theta},\quad \beta=e^{-i\theta}.$$

从而由(6)式算出

$$D_n=\cos n\theta$$

综合上述三点，总之有 $D_n=\cos n\theta$.

10. 借方程(或方程组)定值

例 12 （天津师大研究生入学试题） 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}$$

解 作线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 + \cdots + a_1^{n-1}x_n = a_1^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 + a_nx_2 + a_n^2x_3 + \cdots + a_n^{n-1}x_n = a_n^n \end{cases} \tag{1}$$

当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有两个相等时，显然 $D_n=0$. 因此可设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互不相等，则由克莱姆法则

$$x_n = \frac{D_n}{V_n}. \tag{2}$$

其中 V_n 为(1)的系数行列式，由范德蒙行列式

$$V_n = \prod_{i>j}(a_i - a_j) \tag{3}$$

再作方程

$$t^n - x_nt^{n-1} - x_{n-1}t^{n-2} - \cdots - x_2t - x_1 = 0. \tag{4}$$

则由(1)知方程(4)有 n 个根 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，由韦达定理

$$x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{5}$$

将(3)，(5)代入(2)，算得

$$D_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \prod_{1 \le j < i \le n}(a_i - a_j).$$

11. 降价法

例 13 设 $n \geq 2$，$a_1a_2\cdots a_n \neq 0$，计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解 令

$$A = \begin{pmatrix} -2a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -2a_n \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

则

$$D_n=|A+CEB| \tag{1}$$

其中 E 为二阶单位阵．由第二降阶公式

$$D_n=|A|\cdot|E+BA^{-1}C|. \tag{2}$$

但

$$|A|=(-2)^n a_1 a_2\cdots a_n,$$

$$|E+BA^{-1}C|=\begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \\ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & 1-\frac{n}{2} \end{vmatrix}$$

$$=(-2)^{-2}\left[(n-2)^2-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_j}{a_i}\right],$$

$$\therefore \quad D_n=(-2)^{n-2}a_1\cdots a_n\left[(n-2)^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{a_i}\right].$$

§3 综合题

例1 试列举一些行列式在中学数学中的应用．

解 (1) 曲线方程可用行列式表示．

1) 平面上两个不同点 (x_1,y_1)和(x_2,y_2)，其直线方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{1}$$

因为，若直线方程为

$$Ax+By+C=0$$

$$\therefore \quad Ax_1+By_1+C=0,\ Ax_2+By_2+C=0$$

在上述3个方程中，把 A，B，C 看成未知数，有非零解．从而系数行列式必等于0，即证 (1) 式．

2) 过空间不共线的三点 (x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，(x_3,y_3,z_3)的平面方程为：

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

3) 过平面不共线的三点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3) 的圆的方程为：

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

因为，设圆方程为

$$(x^2+y^2)+Ax+By+C=0$$

$$\therefore \quad (x_1^2+y_1^2)+Ax_1+By_1+C=0$$

$$(x_2^2+y_2^2)+Ax_2+By_2+C=0$$

$$(x_3^2+y_3^2)+Ax_3+By_3+C=0$$

上述方程中把 1，A，B，C 看成未知数，有非零解，所以系数行列式等于 0，从而（3）式成立.

4) 过平面上 5 个点 (x_1,y_1)，…，(x_5,y_5) 的一般二次曲线方程为

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

这只要设二次曲线方程为

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

并将5点代入，由系数行列式等于0可证（4）式.

(2) 求面积.

1) 以 $\vec{a}=a_x i+a_y j+a_z k$ 和 $\vec{b}=b_x i+b_y j+b_z k$ 为边的平行四边形面积为

$$S=\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\right\| \tag{5}$$

（5）式右端外面两条竖线表示向量的模，里面两条表示行列式（下同）.

2) 以空间三点 (x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，(x_3,y_3,z_3) 为顶点的三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}\right\| \tag{6}$$

3) 以平面三点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3) 为顶点的三角形面积为

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

其中正号或负号视行列式取值正负而定. 当行列式值为正时取正号，否则取负号，以保证面积值为正或0（下同）.

4) 以平面上四点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，(x_4,y_4) 为顶点的任意四边形的面积为

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 & 1 \\ x_2+x_3 & y_2+y_3 & 1 \\ x_3+x_4 & y_3+y_4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

这只要证明：设平面上任意四边形的三边形的三边中点为 (a_1,b_1)，(a_2,b_2)，(a_3,b_3)，则其面积公式为

$$S_1=\pm 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

则由（9）式立即可证明（8）式.

（3）求体积

1）以向量 $\vec{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\vec{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，$\vec{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}$ 为棱的平行六面体的体积为

$$V=\pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{10}$$

2）以空间四点 (x_1,y_1,z_1)，$\cdots$，(x_4,y_4,z_4) 为顶点的四面体体积为

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{11}$$

（4）共线和共面

1）平面上三点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3) 共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{12}$$

这由（7）式可得，因为共线的充要条件是面积为0.

2）空间四点 (x_1,y_1,z_1)，$\cdots$，(x_4,y_4,z_4) 共面的充要条件为

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{13}$$

例 2 斐波那契 (Fibonacci) 数 F_i 由条件

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\ (n\geqslant 3),\ F_1=1,\ F_2=2$$

所定义，证明：

$$F_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} \tag{1}$$

证 将 (1) 式右端记为 D_n. 然后将 D_n 按第 1 列展开得

$$D_n=D_{n-1}+D_{n-2}.$$

另一方面，又 $D_1=1$，$D_2=2$. 故 $D_n=F_n$，从而 (1) 式成立.

例 3 (Lagrange) 设 a_i，$b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是复数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)-\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i}\right|^2$$

$$=\sum_{1<i<j<n}\left|\det\begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}\right|^2. \tag{1}$$

证

$$(1)\text{式左端}=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|^2 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overline{b_i} \\ \overline{\left(\sum a_i\overline{b_i}\right)} & \sum\limits_{i=1}^{n}|b_i|^2 \end{vmatrix}$$

$$=\left|\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{b_1} \\ \vdots & \vdots \\ \overline{a_n} & \overline{b^n} \end{pmatrix}\right|$$

由 p.11 本章 §2 答疑辅导 9 的柯西一皮内公式，则得

$$(1)\text{ 式左端}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \overline{a_i} & \overline{b_i} \\ \overline{a_j} & \overline{b_i} \end{vmatrix}=(1)\text{ 式右端}.$$

例 4 (Cauchy—Schwarz) 在例3假设下，证明

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right). \tag{2}$$

证 由上例 (1) 式右端非负即证.

例 5 (复旦大学研究生入学试题) 证明

$$D_4=\begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^2 b_1 & a_2^2 b_2 & a_3^2 b_3 & a_4^2 b_4 \\ a_1 b_1^2 & a_2 b_2^2 & a_3 b_3^2 & a_4 b_4^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & b_4^3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1b_2-a_2b_1)(a_1b_3-a_3b_1)(a_1b_4-a_4b_1)$$

$$\cdot(a_2b_3-a_3b_2)(a_2b_4-a_4b_2)(a_3b_4-a_4b_3)$$

证 当 $a_1a_2a_3a_4=0$ 时，可验证等式成立，下设 $a_1a_2a_3a_4\neq 0$，则

$$D_4=(a_1a_2a_3a_4)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1^{-1}b_1 & a_2^{-1}b_2 & a_3^{-1}b_3 & a_4^{-1}b_4 \\ a_1^{-2}b_1^2 & a_2^{-2}b_2^2 & a_3^{-2}b_3^2 & a_4^{-2}b_4^2 \\ a_1^{-3}b_1^3 & a_2^{-3}b_2^3 & a_3^{-3}b_3^3 & a_4^{-3}b_4^3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_2a_3a_4)^3\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(a_j^{-1}b_j-a_i^{-1}b_i)$$

$$=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(a_ib_j-a_jb_i).$$

例 6 (厦门大学，安徽大学，湘潭大学研究生入学试

题）计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ a & a & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解 从倒数第 2 行开始，每行乘 (-1) 加到下一行得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ a-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 & -1 \end{vmatrix}$$

再从第三行开始，每行乘(-1)加到上一行得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ a-1 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 & -1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

即化为滑梯型行列式，由 p.7 答疑辅导 3，

$$(1)式右端=(-1)^n[(a-1)^n-a^n],$$

$$\therefore \quad D_n=(-1)^n[(a-1)^n-a^n].$$

例 7 （兰州大学研究生入学试题）计算

$$|D_{n+1}|=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & (a-1) & \cdots & (a-n) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解 令

$$S=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & ⋰ & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

为 $n+1$ 阶置倒矩阵，则

$$|SD_{n+1}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & (a-1) & \cdots & (a-n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

$$=n!(n-1)!\cdots 2!,$$

$$\because \quad |S|=(-1)^{\frac{(n+1)n}{2}},$$

$$\therefore \quad |D_{n+1}|=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}n!(n-1)!\cdots 2!.$$

例 8 （浙江大学研究生入学试题） 求证

$$|A+UV'|=|A|+V'A^*U \tag{1}$$

其中 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，$U'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$V'=(y_1,\cdots,y_n)$，A^* 为 A 的伴随矩阵，U' 和 V' 为 U 和 V 的转置.

证

$$|A+UV'|=\begin{vmatrix} a_{11}+x_1y_1 & a_{12}+x_1y_2 & \cdots & a_{1n}+x_1y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x_ny_1 & a_{n2}+x_ny_2 & \cdots & a_{nn}+x_ny_n \end{vmatrix} \tag{2}$$

将(2)式右端拆成 2^n 个 n 阶行列之和，除那些为 0 的外. 则

$$|A+UV'|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1y_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & x_1y_2 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & x_ny_2 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & x_1y_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$= |A|+y_1\sum_{i=1}^{n}x_iA_{i1}+y_2\sum_{i=1}^{n}x_iA_{i2}+\cdots+y_n\sum_{i=1}^{n}x_iA_{in}$$

$$=|A|+(y_1\cdots y_n)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=|A|+V'A^*U.$$

第二章　线性方程组

§1　向量的线性相关性

（一）内容提要

1．如果有m个数$k_1, k_2, \cdots, k_m$，使

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

则说向量β是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的线性组合，或说$\beta$可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表出（线性表示）．

2．如果有不全为0的数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

则说$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性相关；如果仅当$k_1, k_2, \cdots, k_m$全为0时上述等式才成立，则说$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关．

3．如果向量组的一个部分组线性无关，且原向量组中每个向量都可由这个部分组线性表出，则说这个部分组是原向量组的一个极大无关组．

4．向量组的极大无关组所含向量的个数叫做这个向量组的秩．仅含零向量的向量组的秩规定为0．

5．线性相关与线性无关的判定

（1）向量组

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$$
$$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots a_{mn})$$

线性相（无）关的充要条件是向量方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

亦即齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0 \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0 \end{cases}$$

有非零解（只有零解）.

(2) 一个向量 α 线性相（无）关的充要条件是 $\alpha=0$ ($\alpha\neq0$).

(3) 两个向量线性相（无）关的充要条件是它们成比例（不成比例）.

(4) 含有零向量的向量组线性相关.

(5) 含有两个成比例向量组线性相关.

(6) 部分组线性相关，全组必线性相关.

或说：全组线性无关，部分组必线性无关.

(7) 线性相关向量组减少分量后仍线性相关.

或说：线性无关向量组增加分量后仍线性无关.

(8) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geqslant2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一向量是其余向量的线性组合.

或说：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geqslant2)$ 线性无关的充要条件是其中任一向量都不是其余向量的线性组合.

(9) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，且 β 不能由 α_1, $\alpha_2,\cdots$, α_m 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性无关.

或说：设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$, 线性无关，但 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出.

(10) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出则

$$秩\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\} \leqslant 秩\{\beta_1, \cdots, \beta_t\}.$$

(11) $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

(12) 行列式的行（或列）向量线性相（无）关的充要条件是这个行列式等于零（这个行列式不等于0）.

(13) 向量组线性相（无）关的充要条件是向量组的秩小（等）于向量组所含向量的个数.

(14) 对矩阵作初等行（列）变换，不改变矩阵的列(行)向量间的线性关系.

(二) 答疑辅导

1. 下列命题是否正确?

(1) 若 $0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m=0$，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

(2) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，则对任一组不全为0的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$.

(3) 若有一组不全为0的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

(4) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，则等式 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+k\beta=0$ 中的 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 必全为0.

(5) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，则线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$ 中的系数必全为0.

(6) 若向量组线性相关，则组中任一向量都可由其余向量线性表出.

(7) 若 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表出，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，$\beta$ 线性无关.

(8) 两个等价向量组，一个线性无关，另一个也必线性无关.

(9) 两个等价向量组，必含有相同个数的向量.

(10) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中 r 个向量，不失一般，设为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，如果满足下列三条中的任意两条，则必为一极大无关组：

1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩为 r；

2) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

3) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中每个向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出.

答 (1)不一定. 因为不论 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是线性相关还线是性无关，恒有等式 $0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m=0$ 成立.

(2)错. 当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关时，必有无穷多组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

但不是对任一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有上述等式成立. 例如，$\alpha_1=(1,-3)$，$\alpha_2=(-2,6)$ 线性相关，有 $2\alpha_1+\alpha_2=0$，或一般有 $2k\alpha_1+k\alpha_2=0$ （k 为任意数）. 但 $3\alpha_1+\alpha_2\neq0$.

(3)错. 例如 $\alpha_1=(1,0)$，$\alpha_2=(0,0)$，有 $k_1=1,k_2=0$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\neq0$，但 α_1,α_2 线性相关. 若对任一组（不只是一组!）不全为0的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq0$，则可断定 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关（自证）.

(4)不一定. 当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性无关时，$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 必全为0；当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关时，$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 可以不全为0.

(5)错. 因向量的线性组合是向量的线性运算，不考虑这些向量是否线性相关.

(6)不一定. 例如(1,0) (0,0)线性相关，但(1,0)不能由(0,0)线性表出.

(7) 不一定. 当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关时, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性无关; 当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关时, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关.

(8) 不一定. 例如向量组与它的极大无关组等价.

(9) 不一定. 见(8) 的答案. 但两个等价线性无关向量组必含有相同个数的向量.

(10)正确.

2. "线性无关"有哪些等价说法?

答 有下列等价说法:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 不线性相关

(2) 不存在一组不全为0的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

(3) 所有不全为0的数组 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 都使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$$

(4) 仅有一组全为0的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 能使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

(5) 由 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 只能推出 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$.

3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的秩为 r. 问: 其中任意 r 个向量是否必线性无关? 少于 r 个向量是否也必线性无关? 多于 r 个向量是否必线性相关?

答 任意 r 个向量不一定线性无关, 少于 r 个向量也不一定线性无关, 但多于 r 向量必线性相关. 例如向量组 $\alpha_1=(1,0,0)$, $\alpha_2=(0,1,0)$, $\alpha_3=(-1,0,0)$, $\alpha_4=(0,0,0)$ 的秩为2, 但 α_1, α_3 线性相关, α_4 也线性相关.

(三) 题型归类

1. 线性表出的求法

例 1　把向量 $\beta=(2,3,-4,1)$ 表成 $\alpha_1=(1,-1,2,2)$，$\alpha_2=(0,3,1,4)$，$\alpha_3=(3,0,7,10)$，$\alpha_4=(1,1,3,5)$ 的线性组合.

解　令

$$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4.$$

则

$$\begin{cases} x_1 \qquad +3x_3+x_4=2 \\ -x_1+3x_2 \qquad +x_4=3 \\ 2x_1+x_2+7x_3+3x_4=-4 \\ 2x_1+4x_2+10x_3+5x_4=1 \end{cases}$$

解之，得

$$x_1=31-3x_3,\quad x_2=21-x_3,\quad x_4=-29$$

其中 x_3 可任意取值．取 $x_3=0$，得

$$\beta=31\alpha_1+21\alpha_2-29\alpha_4.$$

注　若方程组无解，则 β 不能由 α_1，α_2，α_3，α_4 线性表出.

2．极大无关组的求法

例 2　求向量组 $\alpha_1=(6,4,1-1,2)$，$\alpha_2=(1,0,2,3,-4)$，$\alpha_3=(1,4,-9,-16,22)$，$\alpha_4=(7,1,0,-1,3)$ 的一极大无关组.

解法 I（初等变换法）

以 α_1，α_2，α_3，α_4 为列作矩阵 A，对 A 作初等行变换化为 B：

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=B$$

由 B 知 α_1，α_2，α_4 是一极大无关组，且 $\alpha_3=\alpha_1-5\alpha_2$.

解法Ⅱ（子式法）

上述A中所有4阶子式都等于0，而有一个3阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

故这个子式所在的列向量 α_2，α_3，α_4 是一极大无关组.

解法Ⅲ（逐一扩充法）

任取一非0向量，比如取 α_1，则 α_1 线性无关. 因 α_2 不能被 α_1 线性表出（对应分量不成比例），故 α_1，α_2 线性无关. 因 α_3 能被 α_1，α_2 线性表出($\alpha_3=\alpha_1-5\alpha_2$)，故去掉 α_3. 因 α_4 不能被 α_1，α_2 线性表出，故 α_1，α_2，α_4 线性无关，它们便是一极大无关组.

3. 线性相关性的判定与证明

例 3 （日本山梨大学研究生入学试题）给定下列四个3维向量：

$\alpha_1=(3,-1,1)$，$\alpha_2=(1,1,2)$，$\alpha_3=(1,-3,-3)$，

$\alpha_4=(4,0,5)$.

1）证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

2）证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关.

证 1）由 $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

2）以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为行组成矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

因为$|A|\neq 0$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关.

例 4　设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关，且可由 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性表出，则 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 也线性无关.

证　由p.32内容提要5知

$$m=\text{秩}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}\leqslant\text{秩}\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}\leqslant m$$

$\therefore$　秩$\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}=m$.

即证 β_1，$\cdots\beta_m$ 线性无关.

例 5　设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则向量组

$$\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_{m-1}+\alpha_m,\ \alpha_m+\alpha_1$$

线性无关的充要条件是 m 为奇数.

证　令

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\ \cdots,\ \beta_{m-1}=\alpha_{m-1}+\alpha_m,$$

$$\beta_m=\alpha_m+\alpha_1$$

则

$$(\beta_1,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)A$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots\cdots & 1\\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & & 1 & 1\end{pmatrix}_{m\times m}$$

$$|A|=(-1)^{m-1}+1.$$

则

$$\beta_1,\cdots,\beta_m\text{ 线性无关}\Longleftrightarrow A\text{可逆}\Longleftrightarrow m\text{ 为奇数}.$$

§2　齐次线性方程组

（一）内容提要

1. 齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数矩阵的秩小于未知量的个数. 特别有

(1) 方程个数小于未知量个数的齐次线性方程组必有非零解.

(2) 方程个数等于未知量个数的齐次线性方程组有非零解的充要条件是系数行列式等于零.

2. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $Ax=0$ 的所有解构成成线性空间

$$W=\{x\mid Ax=0\},\ \dim W=n-秩(A).$$

当 $\dim W=0$ (即秩$A=n$) 时，$Ax=0$ 仅有零解. 当 $\dim W=t$ (即秩$(A)=n-t$)时，设 W 的一组基为 $\eta_1,\cdots,\eta_t$. 则$\eta_1,\cdots,\eta_t$ 为 $Ax=0$ 的一组基础解系. 则

$$W=L(\eta_1,\cdots,\eta_t)=\{k_1\eta_1+\cdots+k_t\eta_t\mid k_i\in P\}$$

(二) 答疑辅导

1. "基础解系"有哪些等价说法?

答 有下列等价说法:

(1) 齐次线性方程组的所有解向量的一个极大无关组.

(2) 齐次线性方程组的解空间的一个基.

2. 下列命题正确吗?

(1) 与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系.

(2) 系数矩阵的秩 r 小于未知量的个数 n 的齐次线性方程组，它的任意 $n-r$ 解向量都是一基础解系.

答 (1) 正确. 因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 是与基础解系等价的线性无关向量组，则每个解向量可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 线性表出，又 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 线性无关，所以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 也是基础解系.

(2) 错. 因任意 $n-r$ 个解向量不一定线性无关. 当 $n-r$ 个解向量线性无关时必是一基础解系. 这是因为 $n-r$ 个线性无关解向量与基础解系等价.

3. 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的列向量都是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ \qquad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$$

的解向量．问：A 的四个列向量是否构成该方程组的一基础解系？若不构成，能否不用解方程组的方法，求出一基础解系？

答 方程组的系数矩阵的秩为2，故基础解系含有$5-2=3$个解向量．而A 有四列，故不构成基础解系．但秩$(A)=3$，且第1,2,4列线性无关，它们构成一基础解系．

（三） 题型归类

1．基础解系的求法

例 1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=0 \\ x_1+x_2 \qquad +2x_4-3x_5=0 \\ \qquad 2x_2+x_3-3x_4+2x_5=0 \\ 2x_1 \qquad +x_3+x_4-4x_5=0 \end{cases}$$

的一基础解系．

解 对系数矩阵A 作初等行变换化为B(要求 B 是阶梯形，且每个主元所在的列是单位向量)：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-1\\1&1&0&2&-3\\0&2&1&-3&2\\2&0&1&1&-4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2&-3\\0&1&0&0&0\\0&0&1&-3&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

由B知方程组的一般解为

$$\begin{cases}x_1=-2x_4+3x_5\\x_2=0\\x_3=3x_4-2x_5\end{cases}\qquad(x_4,x_5\text{为自由未知量})$$

分别取$x_4=1,x_5=0$；$x_4=0,x_5=1$，得一基础解系

$\eta_1=(-2,0,3,1,0)\qquad\eta_2=(3,0,-2,0,1)$

例2 （中南矿冶学院）问 λ 为何值时方程组

$$\begin{cases}x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1-x_2+x_3=0\\\lambda x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}\qquad(1)$$

有非零解，并求出方程组的所有非零解.

解 令方程组的系数矩阵为A，则

$$|A|=(\lambda+1)(\lambda-2)$$

当$|A|=0$时，即$\lambda=-1$或$\lambda=2$时，方程组(1)才有非零解.

当$\lambda=-1$时，(1)与下面方程组同解：

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\-x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}\qquad(2)$$

方程组(2)的基础解系为

$$\alpha=(1,1,0)$$

当$\lambda=2$时，(1)与下面方程组同解：

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\x_1-x_2+x_3=0\end{cases}\qquad(3)$$

方程组(3)的基础解系为

$$\beta=(1,0,-1)$$

综上所述，当$\lambda=-1$时，方程组(1)有非零解为$\{k\alpha \mid k \neq 0\}$；当$\lambda=2$时，方程组(1)有非零解$\{l\beta \mid l\neq 0\}$.

例3 （北师大研究生入学试题）设$A=(a_{ij})_{n\times n}$的秩为n，求齐次线性方程组$BX=0$的一个基础解系，其中$B=(a_{ij})_{r\times n}$，$r<n$. X为n元列向量.

解 秩$A=n$，故秩$B=r$. 令解空间为

$$W=\{X \mid BX=0\}$$

$\dim W=n-r$. 即$BX=0$基础解系所含向量个数为$n-r$.

令A_{ij}为行列式$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式，则

$$\begin{cases}\eta_{r+1}=(A_{r+1,1},\cdots,A_{r+1,n})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \eta_n=(A_{n1},\cdots,A_{nn})\end{cases}$$

构成$BX=0$的一个基础解系（因为秩$(A^*)=n$）

2．已知基础解系作齐次方程组

例4 （华中理工大学研究生入学试题）

设向量$\alpha_1=(1,-1,1,0)$，$\alpha_2=(1,1,0,1)$，$\alpha_3=(2,0,1,1)$，它们生成的子空间为$W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，试构造一个齐次线性方程组，使它的解空间是$W$.

解 由于$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$的极大无关组为$\alpha_1,\alpha_2$. 令

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

作齐次线性方程组$AX=0$. 并求出它的一个基础解系为

$$\beta_1'=(1,0,-1,-1)$$
$$\beta_2'=(0,1,1,-1)$$

由 $A\beta_1=0$，$A\beta_2=0$，得

$$\alpha_i\beta_j=0 \qquad (i,j=1,2) \tag{1}$$

令$B=\begin{pmatrix}\beta_1'\\ \beta_1'\end{pmatrix}$，作齐次方程组

$$BX=0 \tag{2}$$

秩$B=2$,故方程组(2)的基础解系所含向量个数等于$4-2=2$
由(1)式知

$$\beta_j'\alpha_i'=0 \qquad (i,j=1,2) \tag{3}$$

$$\therefore \qquad \beta\alpha_i'=0 \qquad (i=1,2)$$

这就证明了α_1,α_2为齐次方程组(2)的一个基础解系.

例5 （湘潭大学研究生入学试题） 设P^n是数域P上全体n维向量构成的线性空间，证明P^n的任一子空间V_1必至少是一个n元齐次线性方程组的解空间.

证 取V_1的一组基$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$,则$V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$. 令

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix} \qquad 秩(A)=m$$

作齐次方程组 $AX=0$,它有一个基础解系为$\beta_1,\cdots,\beta_{n-m}$.
则

$$\alpha_i\beta_j=0 \qquad (i=1,2\cdots m;\ j=1,2,\cdots n-m) \tag{1}$$

令

$$B=\begin{pmatrix}\beta_1'\\ \vdots\\ \beta_{n-m}'\end{pmatrix}$$

作齐次方程组$BX=0$，由(1)式知，$BX=0$的基础解系为α_1,
$\cdots,\alpha_m$.

3. 基础解系的证明

例6 设$r\times n$矩阵$C=(c_{ij})$的行是齐次线性方程组$AX=0$的一基础解系，其中$A=(a_{ij})$是$m\times n$矩阵. $B=(b_{ij})$是r阶非异方阵. 则BC的行也是$AX=0$的基础解系.

证 令$C'=(\alpha_1',\cdots,\alpha_r')$,其中$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$为$C$的行向量，由

假设

$$A\alpha_i'=0 \qquad (i=1,2,\cdots,r) \tag{1}$$

$$BC=\begin{pmatrix} b_{11}\cdots b_{1r}\\ \vdots \qquad \vdots \\ b_{r1}\cdots b_{rr}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_r\end{pmatrix} \tag{2}$$

其中

$$\beta_k=b_{k1}\alpha_1+\cdots+b_{kr}\alpha_r \qquad (k=1,2,\cdots,r) \tag{3}$$

则

$$A\beta_k'=A(b_{k1}\alpha_1'+\cdots+b_{kr}\alpha_r')=0 \qquad (k=1,2,\cdots,r)$$

这样$\beta_1,\cdots,\beta_r$均为$AX=0$的解．由(2)式知$\beta_1,\cdots\beta_r$与$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$有相同的秩．但秩$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}=r$．故秩$\{\beta_1,\cdots,\beta_r\}=r$．从而$\beta_1,\cdots\beta_r$也是$AX=0$的一基础解系．

例7 设A,B都是n阶方阵．则

1) 齐次线性方程组$ABX=0$与$BX=0$同解的充要条件是秩$(AB)=$秩(B)．这里$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$．

2) 这两个方程组的解空间正交的充要条件是$|B|\neq 0$．

证 1) 设$ABX=0$与$BX=0$同解．如果只有零解，则秩$(AB)=n=$秩(B)．如果有非零解，则它们的基础解系相同，因而系数矩阵等秩，而秩$(AB)=$秩(B)．

反之，设秩$(AB)=$秩$(B)=r$．则$ABX=0$与$BX=0$的基础解系各含$n-r$个解向量．但$BX=0$的基础解系是$ABX=0$的$n-r$个线性无关解向量，故也是$ABX=0$的基础解系．所以$ABX=0$与$BX=0$同解．

2) 设V_1,V_2分别是$ABX=0$与$BX=0$的解空间，显然有$V_2\subseteq V_1$，于是

$$V_1\perp V_2\Longleftrightarrow V_1\cap V_2=\{0\}$$

但$V_1\cap V_2=V_2$，所以

$$V_1\perp V_2\Longleftrightarrow V_2=\{0\}\Longleftrightarrow |B|\neq 0$$

§3 非齐次线性方程组

（一） 内容提要

1. 线性方程组有解的充要条件是系数矩阵与增广矩阵等秩.

2. 设 n 元线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩同为 r. 则当 $r=n$ 时，方程组有唯一解；当 $r<n$ 时，方程组有无穷多解.

3. 非齐次线性方程组的全部解等于它的一个特解与它导出组的全部解的和.

（二） 答疑辅导

1. 线性方程有哪几种表示法？

答 通常有以下三种表示法：

1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \ (i=1,2,\cdots,m)$

2) $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=\beta \quad \alpha_i,\beta$ 是 m 元列向量

3) $A_{m\times n}X_{n\times 1}=B_m$

2. 线性方程组能否恰有 m 个解（m 是大于 1 的有限整数）？

答 线性方程组的解的情况有且仅有以下三种：无解，有唯一解，有无穷多解. 而决不可能恰有 $m(>1)$ 个解.

3. 非齐次线性方程组的解的线性组合是否仍是它的解？

答 不一定. 例如 $x_1+x_2=1$ 的解 $\eta_1=(1,0)$，$\eta_2=(0,1)$ 的线性组合 $\eta_1+\eta_2=(1,1)$ 不是它的解，但 $2\eta_1-\eta_2=(2,-1)$ 是它的解. 一般有

非齐次线性方程组 $A_{m\times n}X_{n\times 1}=B_{m\times 1}$ 的解 $\eta_1,\cdots,\eta_t$ 的线性组合 $k_1\eta_1+\cdots+k_t\eta_t$ 仍是它的解的充要条件是 $k_1+\cdots+$

$k_t=1$. 事实上,

$$A(k_1\eta_1+\cdots+k_t\eta_t)=k_1A\eta_1+\cdots+k_tA\eta_t$$
$$=(k_1+\cdots+k_t)B$$

但 $B\neq 0$, 故

$$(k_1+\cdots+k_t)B=B\Longleftrightarrow k_1+\cdots+k_t=1.$$

4. 非齐次线性方程组的系数矩阵的秩与增广矩阵的秩的关系怎样?

答 设系数矩阵 A 的秩为 r, 增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩为 $\bar{r}$. 则 r 与 $\bar{r}$ 的关系是 $r\leqslant\bar{r}\leqslant r+1$, 即 $\bar{A}$ 的秩比 A 的秩最多大 1. 这是因为: 显然 $r\leqslant\bar{r}$. 又 $\bar{A}$ 的任何 $r+2$ 阶子式 D 如果不含 $\bar{A}$ 的最后一列, 则 D 为 A 的 $r+2$ 阶子式, 故 $D=0$; 如果 D 含 $\bar{A}$ 的最后一列, 将 D 按最后一列展开, 其余子式都是 A 的 $r+1$ 阶子式, 故也有 $D=0$. 所以 $\bar{r}\leqslant r+1$.

5. 非齐次线性方程组的任一解与其导出组的基础解系合起来是否线性无关?

答 线性无关. 因非齐次线性方程组的解不能由其导出组的基础解系线性表出, 而基础解系又线性无关.

(三) 题型归类

1. 线性方程组的解法

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4-x_5=-2\\ x_1+x_2+2x_4-3x_5=-1\\ 2x_2+x_3-3x_4+2x_5=-1\\ 2x_1+x_3+x_4-4x_5=-3 \end{cases}$$

解法 I (消元法) 对增广矩阵 $\bar{A}$ 作初等行变换化为阶梯形 B (并要求 B 的每个主元所在的列是单位向量):

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-1&-2\\1&1&0&2&-3&-1\\0&2&1&-3&2&-1\\2&0&1&1&-4&-3\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&2&-3&-1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&-3&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

由 B 知方程组的一般解为

$$\begin{cases}x_1=-1-2x_4+3x_5\\x_2=0\\x_3=-1+3x_4-2x_5\end{cases}\qquad (x_4, x_5 \text{ 是自由未知量})$$

解法Ⅰ（克莱姆规则） 因秩（A）＝秩（$\bar{A}$）＝3，且位于 $\bar{A}$ 左上角的三阶子式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=2(\neq 0)$$

故只须解 D 所在的方程和未知量．把 x_4，x_5 移到右边，得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-2+x_4+x_5\\x_1+x_2\qquad=-1-2x_4+3x_5\\\qquad 2x_2+x_3=-1+3x_4-2x_5\end{cases}\qquad(1)$$

由克莱姆规则，得

$$\begin{cases}x_1=-1-2x_4+3x_5\\x_2=0\\x_3=-1+3x_4-2x_5\end{cases}$$

其中 x_4，x_5 是自由未知量．

解法Ⅱ（逆矩阵法） 把(1)写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&+&x_4&+&x_5\\-1&-&2x_4&+&3x_5\\-1&+&3x_4&-&2x_5\end{pmatrix} \qquad (2)$$

用 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1/ & 1/2 & -1/2\\-1/2&1/2&1/2\\1&-1&0\end{pmatrix}$ 左乘(2)的两端，得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2x_4+3x_5\\0\\-1+3x_4-2x_5\end{pmatrix}$$

例 2 解线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3-\cdots-x_n=2a\\-x_1+3x_2-x_3-\cdots-x_n=4a\\-x_1-x_2+7x_3-\cdots-x_n=8a\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\-x_1-x_2-x_3-\cdots+(2^n-1)x_n=2^na\end{cases}$$

解 令 $s=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则原方程组为

$$\begin{cases}-s+2x_1=2a\\-s+4x_2=4a\\-s+8x_3=8a\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\-s+2^nx_n=2^na\end{cases}$$

由此得

$$x_1=a+\frac{s}{2},\quad x_2=a+\frac{s}{4},\quad\cdots,\quad x_n=a+\frac{s}{2^n} \qquad (1)$$

将上面所有式子统统相加得

$$s=x_1+x_2+\cdots+x_n=na+s\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=na+s\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

即　$s=n2^n a$. 代入(1)式,得

$$\begin{cases} x_1=(1+n2^{n-1})a \\ x_2=(1+n2^{n-2})a \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=(1+n)a \end{cases}$$

注　此例也可用例1中所列的几种方法求解，但计算量较大．因此，特殊方程组常用特殊解法．

例3　有一堆苹果,要平均分给5只猴子.第一只猴子来了，把苹果分成5堆，还多一个扔了，自己拿走一堆；第二只猴子来了，又把苹果平均分成5堆，又多一个扔了，自己拿走一堆；以后每只猴子来了，都如此办理．问原来至少有多少个苹果？最后至少有多少个苹果？（李政道提供．他指出：此题用通常方法求解相当麻烦）

解　设原来有x_1个苹果．5只猴子分得的苹果个数依次为x_2，x_3，x_4，x_5，x_6．则有

$$\begin{cases} x_1=5x_2+1, \\ 4x_2=5x_3+1, \\ 4x_3=5x_4+1, \\ 4x_4=5x_5+1, \\ 4x_5=5x_6+1. \end{cases}$$

从第二至第四方程两端分别加4，得

$$\begin{cases} x_2+1=\frac{5}{4}(x_3+1), \\ x_3+1=\frac{5}{4}(x_4+1), \\ x_4+1=\frac{5}{4}(x_5+1), \\ x_5+1=\frac{5}{4}(x_6+1). \end{cases}$$

逐次往上代入，得

$$x_2+1=\left(\frac{5}{4}\right)^4(x_6+1)$$

把 $x_2=\left(\frac{5}{4}\right)^4(x_6+1)-1$ 代入第一个方程，得

$$x_1=\frac{5^5}{4^4}(x_6+1)-4$$

因 4^4 与 5^5 互素，故欲使 x_1 为正整数，必须 $x_6+1>0$，且 x_6+1 被 4^4 整除．即

$$x_6+1=4^4N \quad (N\text{ 为正整数})$$

当 $N=1$ 时，x_6，x_1 有最小正整数解：

$$x_6=4^4-1=255,\quad x_1=5^5-4=3121$$

故原来至少有苹果 3121 个．最后至少有苹果 $4x_6=1020$ 个．

2．含参变量的非齐次线性方程组的解法

例 4　（苏联大学生数学竞赛试题）　研究方程组

$$\begin{cases}(3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda\\(2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1\\x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1\end{cases}$$

的解的情况，在有解时求出其解．

解　设系数行列式为△，则

$$\triangle=(\lambda-1)^2(3-\lambda)$$

1）当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq3$ 时，有 $\triangle\neq0$，由克莱姆法则，原方程组有唯一解

$$x_1=-1,\quad x_2=\frac{4-\lambda}{3-\lambda},\quad x_3=\frac{1}{3-\lambda}.$$

2）当 $\lambda=1$ 时，则方程组与下面方程同解

$$x_1+x_2+x_3=1$$

从而原方程组有无穷多个解为：

$$x_1=1-x_2-x_3 \qquad (x_2, x_3 \text{ 为自由未知量})$$

3）当 $\lambda=3$ 时，原方程组为

$$\begin{cases} -3x_1-x_2+x_3=3 \\ -x_1-x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2-x_3=1 \end{cases}$$

从上面方程组的后两个方程看出此方程组无解，从而原方程组也无解.

例 5 设非齐次线性方程组 $A_{m\times n}X_{n\times 1}=B_{m\times 1}$ 的系数矩阵与增广矩阵的秩同为 $r(<n)$.则它的解可由 $n-r+1$ 个线性无关的解线性表出.

证 设 α 是所给方程组的一解，而 α_1，α_2，…，α_{n-r} 是其导出组的基础解系.则

$$\alpha,\ \alpha+\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha+\alpha_{n-r}$$

是所给方程组的 $n-r+1$ 个解.下证它们线性无关.令

$$k\alpha+k_1(\alpha+\alpha_1)+\cdots+k_{n-r}(\alpha+\alpha_{n-r})=0$$

$$\therefore\quad (k+k_1+\cdots+k_{n-r})\alpha+k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}=0$$

因非齐次线性方程组的解不是其导出组的解，故 α 不能由 α_1，…，α_{n-r} 线性表示.所以

$$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$$

$$\therefore\quad k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}=0$$

由 α_1，…，α_{n-r} 线性无关，得

$$k_1=\cdots=k_{n-r}=0$$

进而得 $k=0$.

最后，设 β 是所给方程组的任一解，则 $\beta-\alpha$ 是导出组的解，因而可由 α_1，…，α_{n-r}线性表出：

$$\beta-\alpha=t_1\alpha_1+\cdots+t_{n-r}\alpha_{n-r}$$

所以

$$\beta=(1-t_1-\cdots-t_{n-r})\alpha+t_1(\alpha+\alpha_1)+\cdots+t_{n-r}(\alpha+\alpha_{n-r})$$

4．线性方程组解的证明

例 6 线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\quad(1)$$

有解的充要条件是齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_m=0\end{cases}\quad(2)$$

的每个解 c_1, …, c_m 都适合 $b_1c_1+\cdots+b_mc_m=0$.

证 必要性：设（1）有解 $(d_1, \cdots, d_n)$.则

$$b_1c_1+\cdots+b_mc_m=(a_{n}d_1+\cdots+a_{m}d_n)c_1+\cdots$$

$$+(a_{m1}d_1+\cdots+a_{mn}d_n)c_m$$

$$=(a_{11}c_1+\cdots+a_{m1}c_m)d_1+\cdots+(a_{1n}c_1+\cdots+a_{mn}c_m)d_n$$

$$=0\cdot d_1+\cdots+0\cdot d_n=0.$$

充分性：设$b_1c_1+\cdots+b_mc_m=0$.则方程组

$$\begin{cases}a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_m=0\\ b_1y_1+\cdots+b_my_m=0\end{cases}\quad(3)$$

与（2）同解.因而它们的系数矩阵等秩.故（3）的系数矩阵的最后一行可由前 n 行线性表出，其表出系数即为（1）的解.

例 7 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $m\times p$矩阵，则矩阵方程 $AX=B$ 有解的充要条件是秩（A）＝秩（A, B）.并在有解时，求其通解.

证 令 $B=(B_1, \cdots, B_p)$, $X=(X_1, \cdots, X_p)$

$$X_i=(x_{1i}, \cdots, x_{ni})' \quad i=1, 2, \cdots, p$$

$$AX=B \text{ 有解} \Longleftrightarrow AX_i=B_i \text{ 有解} \Longleftrightarrow \text{秩}(A)=\text{秩}(A,B_i)$$
$$\Longleftrightarrow \text{秩}(A)=\text{秩}(A,B)$$

设 $C=(c_1, \cdots, c_p)$ 是 $AX=B$ 的一解，$\eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$ 是

$$A(x_1,\cdots,x_n)'=0, \quad \text{秩}(A)=r$$

的一基础解系，则 $AX=B$ 的通解为

$$X=(c_1+k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}, \cdots,$$
$$c_p+t_1\eta_1+\cdots+t_{n-r}\eta_{n-r})$$

其中 $k_i, \cdots, t_i(i=1, 2, \cdots, n-r)$ 是任意数.

§4 结式与二元高次方程组

(一) 内容题要

1. 设多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$
$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$$

则行列式

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m\text{行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n\text{行} \end{matrix}$$

叫做 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的结式.

2. 当 $a_0b_0\neq0$ 时 $R(f, g)=0$ 的充要条件是 $f(x)$ 与

$g(x)$ 有非常公因式.

3. 用结式解二元高次方程组 $\begin{cases} f(x, y)=0 \\ g(x, y)=0 \end{cases}$ 的步骤是：

(1) 将 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 按 x(或 y) 的降幂排列.

(2) 求结式 $R_x(f, g)$ 的根 y_i[或 $R_y(f, g)$ 的根 x_i].

(3) 以 y_i(或 x_i) 代入 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$，若得一公根 x_i(或 y_i)，则 (x_i, y_i) 便是方程组的一解.

4. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n$的所有复根，则

$$\triangle(f)=a_0^{2n-2}\prod_{1<j<i<n}(\alpha_i-\alpha_j)^2$$

叫做 $f(x)$的判别式.

5. $\triangle(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{-1}R(f, f')$

6. $f(x)$有重根$\Longleftrightarrow\Delta(f)=0\Longleftrightarrow R(f,f')=0$

(二) 答疑辅导

1. 结式通常有哪几种定义?

答 通常有两种定义.一种已于前述。另一种是：

$$R(f, g)=a_0^m b_0^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\alpha_i-\beta_j)$$

其中$f(x)=a_0\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$，$g(x)=b_0\prod_{j=1}^{m}(x-\beta_j)$

两种定义比较：后一定义用根表示结式，前一定义用系数表示结式；后一定义限于复数域，前一定义不限于复数域；后一定义中 a_0，b_0 都不为0，前一定义中 a_0，b_0 都可以为0.因此前一定义比后一定义更具有广泛性。但由后一定义较易推出以下性质：

(1) $R(f, g)=a_0^m g(\alpha_1)\cdots g(\alpha_n)$

(2) $R(f, g)=(-1)^{mn}b_0^n f(\beta_1)\cdots f(\beta_m)$

(3) $R(f, g)=(-1)^{mn}R(g, f)$

可以证明，当 $a_0b_0\neq 0$ 时，在复数域上这两种定义是等价的。

2．设 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$．问等式 $R(g, f)=R(g, r)$是否成立？

答 当 $g(x)$ 的首项系数为 1 时，等式成立；当 $g(x)$的首项系数不为 1 时，等式不成立．事实上，设 $g(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-\beta_i)$．由于 $g(x)$ 的首项系数为 1，故

$$R(g, f)=f(\beta_1)\cdots f(\beta_m)$$

又

$$f(\beta_i)=g(\beta_i)q(\beta_i)+r(\beta_i)=r(\beta_i)$$

所以

$$R(g, f)=r(\beta_1)\cdots r(\beta_m)=R(g, r)$$

3．二元高次方程组的解数的情况如何？

答 设多项式 $f(x, y)$，$g(x, y)$ 关于 x，y 的次数分别为 m 和 n．则

1）当 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 不互素时，方程组 $\begin{cases}f(x,y)=0\\g(x,y)=0\end{cases}$ 有无穷多解．

2）当 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 互素时，方程组 $\begin{cases}f(x,y)=0\\g(x,y)=0\end{cases}$ 的解数 $\leqslant mn$．

（三）题型归类

1．结式的求法

例 1 求 $f(x)=\dfrac{x^5-1}{x-1}$ 与 $g(x)=\dfrac{x^7-1}{x-1}$ 的结式．

解法 I （行列式法）

$$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$g(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix}\left.\right\}6 \\ \\ \left.\right\}4\end{matrix}=1$$

解法Ⅱ（函数值法） $f(x)$的四个根是不等于1的5次单位根，设为ε_1，ε_2，ε_3，ε_4．则

$$\begin{aligned}R(f,g)&=g(\varepsilon_1)g(\varepsilon_2)g(\varepsilon_3)g(\varepsilon_4)\\&=\prod_{i=1}^{4}\frac{\varepsilon_i^7-1}{\varepsilon_i-1}=\prod_{i=1}^{4}\frac{\varepsilon_i^2-1}{\varepsilon_i-1}\\&=\prod_{i=1}^{4}(\varepsilon_k+1)=1\end{aligned}$$

解法Ⅲ（余 式 法） 以$f(x)$除$g(x)$，$xg(x)$，$x^2g(x)$，$x^3g(x)$，所得余式依次为

$r_1(x)=1+x$，$r_2(x)=x+x^2$，$r_3(x)=x^2+x^3$，$r_4(x)=-1-x-x^2$ 以$r_1(x)$，$r_2(x)$，$r_3(x)$，$r_4(x)$按升幂排列的系数为行的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=1$$

即为$R(f,g)$．（见p.64本章综合题例8）

注 在做解法Ⅰ—Ⅲ时，都可先用$R(f,r)$代替$R(f,g)$〔见本节（二）2.〕

2．二元高次方程组的结式解法

例2 解方程组

$$\begin{cases}f(x,y)=x^2y+x-1=0\\g(x,y)=x^2y^2+2x-2=0\end{cases}$$

解 将 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 按 y 的降幂排列，得

$$R_y(f,g)=\begin{vmatrix} x^2 & x-1 & 0 \\ 0 & x^2 & x-1 \\ x^2 & 2x-2 & 0 \end{vmatrix}=x^2(x-1)(x+1)(2x-1)$$

以 $R_y(f,g)$ 的根 $x_1=1$，$x_2=-1$，$x_3=\frac{1}{2}$，$x_4=0$ 代入 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$，得

$$\begin{cases} f(1,y)=y \\ g(1,y)=y^2 \end{cases} \text{有公根 } y_1=0$$

$$\begin{cases} f(-1,y)=y-2 \\ g(-1,y)=y^2-4 \end{cases} \text{有公根 } y_2=2$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2},y\right)=\frac{1}{4}y-\frac{1}{2} \\ g\left(\frac{1}{2},y\right)=\frac{1}{4}y^2-1 \end{cases} \text{有公根 } y_3=2$$

$$\begin{cases} f(0,y)=-1 \\ g(0,y)=-2 \end{cases} \text{无公根}$$

所以方程组的解为 $(1,0)$，$(-1,2)$，$\left(\frac{1}{2},2\right)$.

3．重根的结式判定法

例3 a 为何值时，$f(x)=x^4-4x+a$ 有重根.

解

$$R(f,f')=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & a & & \\ & 1 & 0 & 0 & -4 & a & \\ & & 1 & 0 & 0 & -4 & a \\ 4 & 0 & 0 & -4 & & & \\ & 4 & 0 & 0 & -4 & & \\ & & 4 & 0 & 0 & -4 & \\ & & & 4 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=4^4(a^3-27)$$

$f(x)$有重根 $\Longleftrightarrow R(f,f')=0 \Longleftrightarrow a=3,\ 3\varepsilon,\ 3\varepsilon^2$

其中 $\varepsilon=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

4．参数方程的结式化法

例4 化参数方程

$$\begin{cases} x=2a\operatorname{tg}\theta \\ y=2a\cos^2\theta \end{cases}$$

为直角坐标方程.

解 令 $\cos\theta=t$. 按 t 的降幂排列，得

$$\begin{cases} f(t)=(x^2+4a^2)t^2-4a^2=0 \\ g(t)=2at^2-y=0 \end{cases}$$

因 $t=\cos\theta$ 是 $f(t)$ 与 $g(t)$ 的公根，故$R(f,g)=0$. 但

$$R(f,g)=(x^2+4a^2)^2y^2-16a^3(x^2+4a^2)y+64a^6$$

是 y 的二次三项式，其判别式

$$[-16a^3(x^2+4a^2)]^2-4\cdot 64a^6(x^2+4a^2)^2=0.$$

故有重根

$$y=\frac{-[-16a^3(x^2+4a^2)]}{2(x^2+4a^2)^2}=\frac{8a^3}{x^2+4a^2},$$

即

$$x^2y+4a^2y-8a^3=0$$

为所求的直角坐标方程.

§5 综合题

例1 （中国科技大学，华中师大研究生入学试题） 设 $n+1$ 人读 n 本不同种类的书，每人至少读一本. 证明，这 $n+1$ 人中必存在两组人读过的书种类相同.

证 把人和书编号. 设第 i 人读第 j 种书为 a_{ij}($a_{ij}=0$ 或1). 则第 i 人读过这 n 种书可记为

$$\alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})\qquad i=1,2,\cdots,n+1$$

因 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}$ 线性相关，故存在不全为0的数 $k_1, \cdots, k_{n+1}$，使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{n+1}\alpha_{n+1} = 0$$

但 a_{ij} 非负，故系数必有正有负，去掉系数为0的项，并把系数为负的项移到右端，得

$$k_t\alpha_t + \cdots + k_r\alpha_r = k_p\alpha_p + \cdots + k_m\alpha_m$$

把第 $t, \cdots, r$ 人编成一组，第 $p, \cdots, m$ 人编成另一组．则这两组人读过的书种类相同．因为

$$k_t\alpha_t + \cdots + k_r\alpha_r = k_p\alpha_p + \cdots + k_m\alpha_m = (b_1, \cdots, b_n)$$

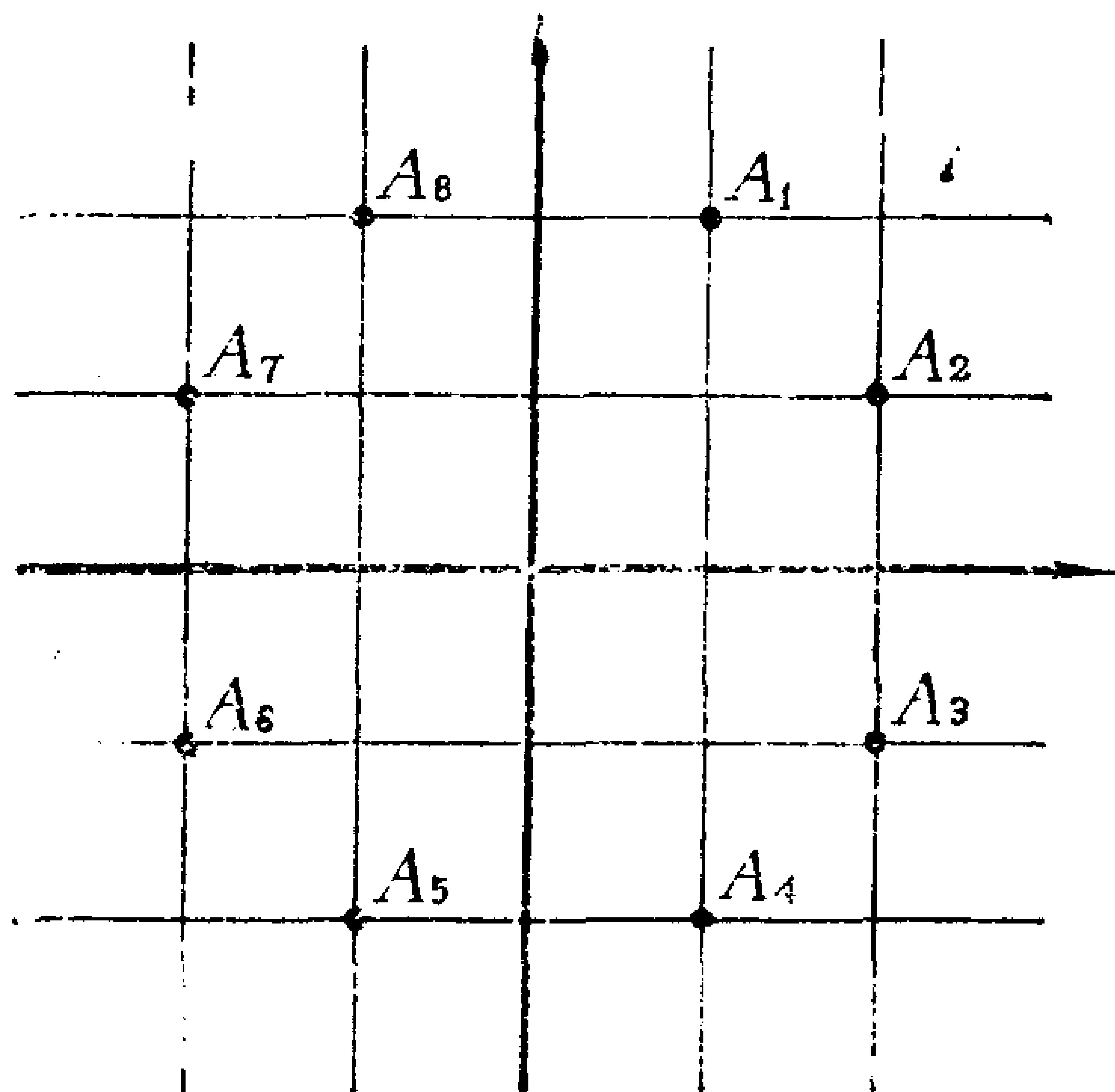
当 $b_j > 0$时，这两组都读过第 j 种书；

当 $b_j = 0$时，这两组都没读过第 j 种书．

(b_j 等于正数与非负数的积，不可能有 $b_j < 0$)．

例2 （中国科学院研究生入学试题） 证明，象棋盘上的马，从任一固定位置出发，只能经过偶数步才能跳回原处．

证 取固定位置为原点，建立直角坐标系(如图)．马有8种跳法：设跳往 $A_i(i=1,2,\cdots,8)$ 位置的为第 i 种．并设第 i



种跳了 x_i 次，共 $2m+1$ 步回到原处．那么

$$\begin{cases}x_1(1,2)+x_2(2,1)+\cdots+x_8(-1,2)=(0,0)\\x_1+x_2+\cdots+x_8=2m+1\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3+x_4-x_5-2x_6-2x_7-x_8=0 & (1)\\2x_1+x_2-x_3-2x_4-2x_5-x_6+x_7+2x_8=0 & (2)\\x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=2m+1 & (3)\end{cases}$$

(1)－(2)＋(3)：

$$2x_2+4x_3+4x_4+2x_5-2x_7-2x_8=2m+1$$

此方程无整数解．矛盾．

例3 设齐次线性方程组 $A_{n\times n}X_{n\times 1}=0$ 有非零解．证明，存在 $B=(b_1,\cdots,b_n)'$ 使方程组 $AX=B$ 无解．

证 因秩$(A)=r<n$，故存在 n 阶可逆阵 P，Q 使

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

令

$$B=P^{-1}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

则 $AX=B$ 无解．这是因为：分别以 P 和 $n+1$ 阶可逆阵

$$Q_1=\begin{pmatrix}Q & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

左乘和右乘增广矩阵 $\bar{A}=(A,B)$，得

$$PAQ_1=(PAQ,PB)=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}$$

所以秩$(\bar{A})$=秩$(P\bar{A}Q_1)=r+1>$秩(A).

例4 （中南矿冶学院） 解下面矩阵方程组

$$\begin{cases}AX+BY=P & (1)\\ CX+DY=Q & (2)\end{cases}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -6 & -13\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}9 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & 4\end{pmatrix}.$$

解 $X+A^{-1}BY=A^{-1}P$,

$$X+C^{-1}DY=C^{-1}Q$$

$$(A^{-1}B-C^{-1}D)Y=A^{-1}P-C^{-1}Q \qquad (3)$$

$$A^{-1}B-C^{-1}D=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}P-C^{-1}Q=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

由(3)解得$Y=\begin{pmatrix}-9 & 9\\ 3 & -3\end{pmatrix}$.再代入(1)解得$X=\begin{pmatrix}20 & -14\\ -10 & 11\end{pmatrix}$.

例5 （上海交大研究生入学试题） $M\in P^{n\times n}$，其中P为数域．$f(x)$，$g(x)\in P[x]$，且$(f(x),\ g(x))=1$．$A=f(M)$，$B=g(M)$，V，V_1，V_2分别为方程组$ABX=0$，$AX=0$，$BX=0$的解空间，求证：$V=V_1\dot{+}V_2$.

证 显然V_1，V_2都是V的子空间。因为$\alpha\in V_1$，那么$f(M)\alpha=0$,从而$g(M)f(M)\alpha=0$,即$\alpha\in V$.所以$V_1\subseteq V$.类似可证$V_2\subseteq V$.

由设，存在$u(x)$，$v(x)\in P[x]$，使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

于是 $$u(M)f(M)+v(M)g(M)=E$$
两端右乘以 $\alpha\in V$，得
$$\alpha=u(M)f(M)\alpha+v(M)g(M)\alpha=\alpha_1+\alpha_2$$
其中 $\alpha_1=v(M)g(M)\alpha\in V_1$，$\alpha_2=u(M)f(M)\alpha\in V_2$（因 $f(M)\alpha_1=f(M)[v(M)g(M)\alpha]=v(M)[g(M)f(M)\alpha]=0$. 同理 $g(M)\alpha_2=0$）. 即 V 是 V_1 与 V_2 的和.

又，对任意 $\alpha\in V_1\cap V_2$，有 $f(M)\alpha=0$ 及 $g(M)\alpha=0$. 以 α 右乘 $u(M)f(M)+v(M)g(M)=E$ 两端，得 $\alpha=0$. 即 $V_1\cap V_2=0$. 所以 V 是 V_1 与 V_2的直和.

例6 （山东大学研究生入学试题） 设 A 是数域 P 上的 $r\times n$ 矩阵，B 是 P 上 $(n-r)\times n$ 矩阵，$C=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$是非奇异矩阵，证明：$n$ 维线性空间 $P^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n)'|x_i\in P\}$是齐次线性方程组 $AX=0$的解子空间 V_1 与 $BX=0$ 的解子空间 V_2 的直和.

证 $|C|\neq 0$，$CX=0$ 只有零解，即 $V_1\cap V_2=\{0\}$. 所以 V_1+V_2是直和.

令
$$C=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\alpha_{r+1}\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$
因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 与 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 都线性无关，即秩$(A)=r$，秩$(B)=n-r$. 从而维$(V_1)=n-r$，维$(V_2)=r$. 于是维$(V_1\dot{+}V_2)=n$. 又 $V_1\dot{+}V_2\subseteq P^n$，所以 $P^n=V_1\dot{+}V_2$.

例 7 （美国大学生数学竞赛题）求方程组
$$\begin{cases}x+y+z=a & (1)\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a} & (2)\end{cases}$$

的所有实数解.

解 设 $xy+yz+zx=b$ (3)

由 (2)、(3) 得 $xyz=ab$ (4)

由韦达定理，作一个以 x，y，z 为根的 3 次方程：

$$t^3-at^2+bt-ab=0 \tag{5}$$

$$0=t^3-at^2+bt-ab=(t-a)(t^2+b) \tag{6}$$

由 (6) 式看出 x，y，z 中有一个等于 a. 再由 (1) 知另两个为不等于 0 的互为相反数.

原方程组的解为：

$$\begin{cases}x=a\\y=k\\z=-k\end{cases} \text{或} \begin{cases}x=k\\y=a\\z=-k\end{cases} \text{或} \begin{cases}x=k\\y=-k\\z=a\end{cases}$$

其中 k 为一切非零实数.

例 8 设多项式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$$

则 $R(f,g)$ 等于以 $f(x)$ 分别除 $g(x)$，$xg(x)$，…，$x^{n-1}g(x)$ 的余式按升幂排列的系数为行作成的行列式.

证 设

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

$$x^{k-1}g(x)=f(x)q_k(x)+r_k(x)$$

其中 $r_k(x)=c_{k1}+c_{k2}x+\cdots+c_{kn}x^{n-1}$ $(k=1,2,\cdots,n)$

于是

$$\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} r_1(x_1) & r_1(x_2) & \cdots & r_1(x_n) \\ r_2(x_1) & r_2(x_2) & \cdots & r_2(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_n(x_1) & r_n(x_2) & \cdots & r_n(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \cdots & g(x_n) \\ x_1 g(x_1) & x_2 g(x_2) & \cdots & x_n g(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} g(x_1) & x_2^{n-1} g(x_2) & \cdots & x_n^{n-1} g(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= g(x_1) g(x_2) \cdots g(x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

由 x_1，x_2，…，x_n的任意性，得

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = g(x_1) g(x_2) \cdots g(x_n) = R(f, g).$$

第三章 矩阵

§1 矩阵的运算性质

（一）内容提要

1．矩阵常见的有7种运算：加、减、乘、数乘、转置、伴随（阵）、逆，本节只介绍前5种运算．

2．$P^{m\times n}$表示数域P上一切$m\times n$矩阵所成之集，则$P^{m\times n}$关于加法构成交换群，即

1）$A+B=B+A$

2）$(A+B)+C=A+(B+C)$，

3）$A+0=A$，

4）$A+(-A)=0$．

3．矩阵的乘法在可乘的条件下，满足结合律，并对加法满足左（右）分配律

$$(AB)C=A(BC),$$
$$(A+B)C=AC+BC,$$
$$D(A+B)=DA+DB.$$

若$P^{n\times n}$表示数域P上一切n阶方阵所成集合，则$P^{n\times n}$关于矩阵加法与乘法构成环．且为含有单位元的非可换的有零因子环．

4．$P^{m\times n}$关于矩阵加法与数乘运算构成P上一个线性空间，即除上面内容提要2中1)，2)，3)，4)外，还满足

5）$1\cdot A=A$，

6) $k(A+B)=kA+kB$,

7) $(k+l)A=kA+lA$,

8) $k(lA)=(kl)A$.

其中 $k,l\in P$，$A,B\in P^{m\times n}$.

且 $\dim P^{m\times n}=mn$. 令 E_{ij} 为位于第 i 行第 j 列的元素为 1，其余元素都为 0 的 $m\times n$ 矩阵，则

$$\{E_{ij}\mid i=1,2\cdots m;\ j=1,2\cdots n\}$$

为 $P^{m\times n}$ 的一组基.

5. 转置矩阵具有下面性质

$$(A')'=A,$$

$$(AB)'=B'A',$$

$$(kA)'=kA',\quad (k\in P)$$

$$(A\pm B)'=A'\pm B'.$$

(二) 答疑辅导

1. 矩阵与行列式有何区别？

答　区别如下：

(1) 矩阵是一个表，行数和列数可以不相等；行列式是一个代数和，行数与列数必须相等.

(2) 两矩阵相等是指对应元素相等；两行列式相等不一定对应元素相等，甚至连阶数都可以不等.

(3) 两矩阵相加是将对应元素相加；两行列式相加，在某种特殊条件下（比如有 $n-1$ 行相同）只能将一行（列）对应元素相加，其余元素照写.

(4) 数乘矩阵是指数乘矩阵每一个元素；数乘行列式，只能用此数乘此行列式的某一行（列）.

(5) 矩阵经初等变换，其秩不变；行列式经初等变换，其值可能改变.

2．矩阵乘法与数乘法性质有何异同？

答 相同之处都满足结合律，满足左右分配律，单位阵扮演数1的角色．指数律成立：

$A^m \cdot A^n = A^{m+n}, (A^m)^n = A^{mn}$．（$m$、$n$为自然数，$A$为方阵）

不同之处有四：

（1）任意两个数一定可乘；两个矩阵满足一定条件才能相乘．

（2）数乘满足交换律；矩阵乘法不满足交换律．

（3）数乘运算无零因子，即当$a \neq 0$，$b \neq 0$时，则$ab \neq 0$；但矩阵乘法有零因子．即$A \neq 0$，$B \neq 0$，但AB可能等于0．

（4）数乘满足消去律，即$ab = ac$，$a \neq 0$则$b = c$；但矩阵乘法不满足消去律，即$AB = AC$，$A \neq 0$可能$B \neq C$．

3．（北京大学，电视大学试题）设A、B为n阶方阵，$|A| \neq 0$，$|B| \neq 0$，下面等式哪些正确，哪些不正确？

（1）若$AB = 0$，则$A = 0$或$B = 0$；

（2）$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$；

（3）$(AB)\ = A\ B^{*}$；

（4）$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$；

（5）$(AB)' = A'B'$；

（6）$\overline{(AB)'} = \overline{A'B'}$；

（7）$|kA| = k|A|$；

（8）$|AB| = |A| \cdot |B|$；

（9）AB和BA的特征值完全相同；

（10）AB和BA的特征向量完全相同．

答 （1）正确，（2）—（7）不正确，（8），（9）正确，（10）不正确．

（三）题型归类

1．计算幂

（1）数学归纳法

例 1 （中国科技大学研究生入学试题） 设

$$A=\begin{pmatrix}1&\alpha&\beta\\0&1&\alpha\\0&0&1\end{pmatrix}$$

求 A^n．

解 演算 A^2 和 A^3，发现规律，猜想

$$A^n=\begin{pmatrix}1&n\alpha&\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+n\beta\\0&1&n\alpha\\0&0&1\end{pmatrix}\tag{1}$$

下面用数学归纳法证明．当 $n=1$ 时，(1) 式显然成立．归纳假设结论对 $n-1$ 成立．则

$$A^n=\begin{pmatrix}1&\alpha&\beta\\0&1&\alpha\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&(n-1)\alpha&\frac{(n-1)(n-2)}{2}\alpha^2+(n-1)\beta\\0&1&(n-1)\alpha\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&n\alpha&\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+n\beta\\0&1&n\alpha\\0&0&1\end{pmatrix}$$

从而 (1) 式对一切自然数 n 成立．

例 2 （武汉测绘科技大学研究生入学试题）设

$$A=\begin{pmatrix}\lambda&1&\cdots&0\\&\lambda&\ddots&\vdots\\&&\ddots&1\\0&&&\lambda\end{pmatrix}$$

为若当块，求 A^n.

解 经过 A^2，A^3 的计算，可猜想

$$A^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & \cdots & C_n^{n-1}\lambda \\ & \lambda^n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & C_n^1\lambda^{n-1} \\ 0 & & & \lambda^n\end{pmatrix} \tag{2}$$

用数学归纳法与组合公式不难证明 (2) 式成立.

(2) 二项展开法

例 3 计算

$$\begin{pmatrix}a & b \\ b & a\end{pmatrix}^n.$$

解 令 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$，则 $A^2=E$，于是

$$\begin{pmatrix}a & b \\ b & a\end{pmatrix}^n=(aE+bA)^n$$

$$=a^nE+na^{n-1}bA+C_n^2a^{n-2}b^2A^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}A+b^nA^n$$

$$=\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}E+\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}A$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}c+d & c-d \\ c-d & c+d\end{pmatrix}$$

其中 $c=(a+b)^n+(a-b)^n$，$d=(a+b)^n-(a-b)^n$.

(3) 对角化法

例 4 $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$，计算 A^n

解 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+5)$，则 A 的特征值为 1，5，-5，相应特征向量为

$\alpha_1=(1,0,0)'$，$\alpha_2=(2,1,2)'$，$\alpha_3=(1,-2,1)'$.

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 则

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,5,-5).$$

$$P^{-1}A^nP=\mathrm{diag}(1,5^n,(-5)^n)$$

$$\therefore\quad A^n=\begin{cases}\begin{pmatrix}1 & 0 & 5^n-1\\ 0 & 5^n & 0\\ 0 & 0 & 5^n\end{pmatrix} & (n\text{ 为偶数})\\ \begin{pmatrix}1 & 4.5^{n-1} & 3.5^{n-1}-1\\ 0 & (-3)\cdot 5^{n-1} & 4.5^{n-1}\\ 0 & 4.5^{n-1} & 3.5^{n-1}\end{pmatrix} & (n\text{ 为奇数})\end{cases}$$

（4）利用哈密尔顿——凯莱定理

例 5 （武汉大学研究生入学试题）设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

试证：对 $n\geqslant 3$，常有 $A^n=A^{n-2}+A^2-E$，由是求 A^{100}.

证 当 $n=3$ 时，因为 $|\lambda E-A|=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$，由哈密尔顿——凯莱定理有

$$A^3=A^2+A-E.$$

从而结论成立．归纳假设结论对 $n-1$ 成立．有

$$A^{n-1}=A^{n-3}+A^2-E$$

两边乘 A，有

$$\begin{aligned}A^n&=A^{n-2}+A^3-A\\ &=A^{n-2}+A^2-E.\end{aligned}$$

因此结论对一切自然数 n 成立．

令 $n=100$，那么

$$\begin{aligned}A^{100}&=A^{98}+A^2-E=A^{96}+2A^2-2E\\ &=\cdots=A^2+49A^2-49E\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{pmatrix}.$$

(5) 带余除法

例 6 (武汉大学研究生入学试题) 求 A^{500}，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&-1&-1&0\\1&1&1&0\\2&2&2&0\end{pmatrix}.$$

解 以 A 的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^3(\lambda-1).$$

除 $g(\lambda)=\lambda^{500}$，得

$$g(\lambda)=s(\lambda)f(\lambda)+a\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda+d. \tag{1}$$

令 $\lambda=0$ 得 $d=0$. 令 $\lambda=1$ 得

$$a+b+c=1. \tag{2}$$

再由 $f'(0)=g'(0)=f''(0)=g''(0)=0$ 得 $b=c=0$, 再由(2)得 $a=1$.

$$\therefore \qquad g(\lambda)=s(\lambda)f(\lambda)+\lambda^3.$$

由哈密尔顿——凯莱定理得

$$A^{500}=g(A)=A^3$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&0&0&0\\1&0&0&0\\2&0&0&0\end{pmatrix}.$$

2. 已知幂 A^n，求 A.

例 7 (中国科技大学研究生入学试题) 设 $A=\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}$，其中 a，b，c 为实数，试求出 a，b，c 的一切可能值，

使得 $A^{100}=E$.

解 A 是上三角阵，其幂仍为上三角阵，故可令

$$A^{100}=\begin{pmatrix} a^{100} & f(a,b,c) \\ 0 & c^{100} \end{pmatrix},$$

其中 $f(a,b,c)$ 是 a,b,c 的整系数多项式， 再由 $A^{100}=E$，得

$$a^{100}=1,\ c^{100}=1,$$

$$\therefore \qquad a=\pm 1,\ =\pm 1,$$

当 $a=c=1$ 时，

$$A^{100}=\begin{pmatrix} 1 & 100b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E,$$

所以 $b=0$，从而 $A=E$.

当 $a=c=-1$ 时，$A=-E$.

当 $a=-c=1$ 或 $a=-c=-1$ 时，b 可以任意.

综上述，A 为下面 4 种可能：

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3．求与某一矩阵可交换的矩阵

例 8 （西安冶金建筑学院研究生入学试题） 设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

求所有与 A 乘法可交换的矩阵 B.

解 设 $B=(x_{ij})$ 为 3 阶方阵，由 $AB=BA$ 得方程组：

$$x_1=x_5=x_9,\ x_3=x_4=x_8,\ x_2=x_6=x_7.$$

所以

$$B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$，其中 a，b，c 为任意数。

§2 矩阵的秩

（一）内容提要

1. 非零矩阵的秩有下面三种等价定义：

(1) 矩阵中不等于零的子式的最大阶数；

(2) 矩阵的行向量组的秩；

(3) 矩阵的列向量组的秩.

并且规定零矩阵的秩为0.

2. 初等变换不改变矩阵的秩.

3. 设秩$(A)=r$，则 A 可经初等变换化为标准形，即存在可逆阵 P，Q，使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. 矩阵和、差、积的秩

秩(A) - 秩$(B)\leqslant$秩$(A\pm B)\leqslant$秩(A) + 秩(B)；

秩(A) + 秩(B) - $n\leqslant$秩$(AB)\leqslant\min($秩(A)，秩$(B))$。

其中 A，B 分别为 $s\times n$ 和$n\times m$ 矩阵；

秩(kA) = 秩(A)；(k 为非零常数).

秩(A) = 秩(A').

5. 当 A 可逆时，则

秩(AB) = 秩(B)，秩(CA) = 秩(C).

当 $AB=0$ 时，则

秩(A) + 秩$(B)\leqslant n$

其中 A，B 分别为 $s\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵.

（二）答疑辅导

1．在秩为 r 的矩阵中，有无等于零的 r 阶子式？有无不等于零的 $r+1$ 阶子式？有无 r 行（列）线性相关？有无 $r+1$ 行（列）线性无关？

答 设秩$(A)=r$，A 中存在某一个 r 阶子式不为零，并不一定所有 r 阶子式不为零，因此可能有等于零的 r 阶子式．但 A 一定不存在不等于零的 $r+1$ 阶子式．

把 A 的所有行向量看成一个向量组，则它存在一个极大线性无关组含 r 个向量，但并不是所有 r 个向量都线性无关．换句话说可能有 r 个行向量线性相关．但没有 $r+1$ 个行线性无关．

对于列有类似的结论．

2．分块阵的秩有哪些主要性质？

答 有下面一些主要公式：

（1）设 $B=\text{diag}(A_1,A_2,\cdots A_m)$，其中 A_k 为 n_k 级方阵．则秩$(B)=\sum_{k=1}^{m}$秩(A_k)．事实上，我们只对 $k=2$ 证明即可，

设 $B=\begin{pmatrix} A & \\ & D \end{pmatrix}$ 秩 $A=r$，秩 $D=t$．则存在可逆阵 P_1,P_2,P_3,P_4 使得

$$P_1AP_2=\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix},\quad P_3DP_4=\begin{pmatrix} E_t & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

其中 E_r 和 E_t 为 r 阶和 t 阶单位阵

令 $P=\begin{pmatrix} P_1 & \\ & P_3 \end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix} P_2 & \\ & P_4 \end{pmatrix}$则 P，Q 为可逆阵，且

$$PBQ=\begin{pmatrix} P_1 & \\ & P_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \\ & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_2 & \\ & P_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_r & & & \\ & 0 & & \\ & & E_t & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 秩$(B)=r+t=$秩$(A)+$秩(D)。

(2) 设 $B=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots A_{1m} \\ & A_{22}\cdots A_{2m} \\ & \ddots \quad \vdots \\ 0 & A_{mm} \end{pmatrix}$

其中 A_{kk} 为方阵．则秩$(B)\leqslant\sum_{k=1}^{m}$秩 (A_{kk}) 不一定成立．只对 $k=2$进行证明即可．

$$A_{11}=A_{22}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

秩$(B)=3$，而秩 $(A_{11})+$秩$(A_{22})=2$.

(3) 第一降秩定理

$$\text{秩}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{cases} \text{秩}(A)+\text{秩}(D-CA^{-1}B), & (A\text{ 可逆}) \\ \text{秩}(D)+\text{秩}(A-BD^{-1}C), & (D\text{ 可逆}) \end{cases}$$

我们只证当 A 可逆时（另一同理可证），考虑

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

则 $\text{秩}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\text{秩}(A)+\text{秩}(D-CA^{-1}B)$.

(4) 第二降秩定理

秩$(D-CA^{-1}B)=$秩$(D)-$秩$(A)+$秩$(A-BD^{-1}C)$

事实上，令

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

当 A，D 均有逆时，有

$$\begin{aligned} \text{秩}(M) &= \text{秩}(A)+\text{秩}(D-CA^{-1}B) \\ &= \text{秩}(D)+\text{秩}(A-BD^{-1}C) \end{aligned}$$

移项即证.

(5) $\max(\text{秩}(A),\ \text{秩}(B))\leqslant\text{秩}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\leqslant\text{秩}(A)+\text{秩}(B)$,

$$\max(\text{秩}(A),\text{秩}(B))\leqslant\text{秩}(A,B)\leqslant\text{秩}(A)+\text{秩}(B).$$

我们只证第二个式子（另一同理可证）. 设秩$(A)=r$, 秩$(B)=t$, 且 A 和 B 的列向量组分别为

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_m \qquad (\text{I})$$

$$\beta_1,\cdots,\beta_s \qquad (\text{II})$$

(A,B)的列向量组为

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_s \qquad (\text{III})$$

显然秩(Ⅲ)≥秩(Ⅰ), 秩(Ⅲ)≥秩(Ⅱ). 所以

$$\text{秩}(A,B)\geqslant\max(\text{秩}A,\ \text{秩}B).$$

设(Ⅰ)和(Ⅱ)的极大无关组分别为

$$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}\ \text{和}\ \beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t}$$

则(Ⅲ)与

$$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r},\ \beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_t} \qquad (\text{IV})$$

等价. 而秩(Ⅳ)不超过它的向量个数 $r+t$. 故

$$\text{秩}(A,B)=\text{秩}(\text{III})=\text{秩}(\text{IV})\leqslant r+t=\text{秩}(A)+\text{秩}(B)$$

3. 什么叫 Sylvester 公式?

答 Sylvester 公式是：设 A, B 分别为 $s\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵，则

$$\text{秩}(A)+\text{秩}(B)-n\leqslant\text{秩}(AB). \qquad (1)$$

我们来证明这一公式（江西大学研究生入学试题）. 由等式

$$\begin{pmatrix}E&0\\-A&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&B\\A&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-B\\0&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&0\\0&-AB\end{pmatrix}$$

$$\text{秩}\begin{pmatrix}E&B\\A&0\end{pmatrix}=n+\text{秩}(-AB)=n+\text{秩}(AB) \qquad (2)$$

另一方面

$$\text{秩}\begin{pmatrix} E & B \\ A & 0 \end{pmatrix} = \text{秩}\begin{pmatrix} B & E \\ 0 & A \end{pmatrix} \leqslant \text{秩}(A) + \text{秩}(B). \qquad (3)$$

由(2)，(3)两式得证(1).

4．什么叫 Frobenius 公式？

答 它是 Sylvester 公式的推广．即

$$\text{秩}(ABC) \geqslant \text{秩}(AB) + \text{秩}(BC) - \text{秩}(B) \qquad (4)$$

我们来证明 Frobenius 公式(4)(厦门大学研究生入学试题).

设 A，B，C 分别为 $s\times n$，$n\times m$，$m\times t$ 矩阵，秩$(B)=r$.

由满秩分解公式(见 p.281 第 8 章 §4)，存在秩为 r 的 $n\times r$ 矩阵 F 和 $r\times m$ 矩阵 H，有 $B=FH$．则

$$\text{秩}(ABC) = \text{秩}(AFHC) \geqslant \text{秩}(AF) + \text{秩}(HC) - r \qquad (5)$$

$$\text{秩}(AB) = \text{秩}(AFH) \leqslant \text{秩}(AF), \qquad (6)$$

$$\text{秩}(BC) = \text{秩}(FHC) \leqslant \text{秩}(HC). \qquad (7)$$

将(6)，(7)代入(5)，即证(4).

（三）题型归类

1．计算矩阵的秩

(1) 最大子式法

例1 (北京大学研究生入学试题) 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶实方阵，

$$a_{ii}>0, \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (1)$$

$$a_{ij}<0, \quad (i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n) \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=0, \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (3)$$

证明：秩$(A)=n-1$.

证 把 A 的各列都加到第 1 列，由(3)式得第 1 列全为 0，于是$|A|=0$. 如果再能证明 A 中有一个 $n-1$ 阶子式不

等于0，那就证明了秩$(A)=n-1$。

考察$|A|$中a_{11}的代数余子式

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由(1)，(2)，(3)知A_{11}是严格对角占优，于是$A_{11}\neq 0$，证毕.

(2) 利用已知公式

例2 （吉林大学研究生入学试题）设

$$秩(A-E)=p，秩(B-E)=q$$

则　秩$(AB-E)\leqslant p+q$.

证　$AB-E=A(B-E)+(A-E)$，

$$秩(AB-E)\leqslant 秩(A(B-E))+秩(A-E)$$
$$\leqslant 秩(B-E)+秩(A-E)=p+q.$$

(3) 利用同解方程组

例3 （华中师范大学研究生入学试题）设A为$n\times m$实矩阵，证明：

$$秩(A)=秩(A')=秩(AA')=秩(A'A) \tag{1}$$

若A是复矩阵呢？

证　秩$(A)=$秩(A')，因此只需证明

$$秩(A)=秩(A'A) \tag{2}$$

或者证明$AX=0$与$A'AX=0$同解即可.

$AX=0$的解显然是$A'AX=0$的解.

反之，设X_0是$X'AX=0$的解，则

$$0=X'_0A'AX_0=(AX_0)'(AX_0). \tag{3}$$

由A是实矩阵，由(3)得$AX_0=0$，从而上述两方程组同解.即证(2)式和(1)式成立.

当 A 为复矩阵时，(1)式不一定成立．比如

$A=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$，有 $A'A=0$

(4) 利用初等变换

例4 设 A 是 n 阶反对称阵，证明

1) A 合同于 $B=\mathrm{diag}(C,\cdots,C,0)$，其中 $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$；

2) 秩(A)等于偶数；

3) $|A|=t^2$ (t 是数)．

证 1) 对 n 用数学归纳法，当 $n=1$ 时，$A=(0)$ 结论成立．当 $n=2$时，$A=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$，若 $a=0$ 结论成立．当 $a>0$，对 A 作初等变换，令

$$P=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{a}}\\ \frac{1}{\sqrt{a}} & 0\end{pmatrix}$$

则

$$P'AP=C.$$

结论也成立．当$a<0$，类似可得．

归纳假设结论对 $n\leqslant k$ 成立，再考察 $n=k+1$ 时．设

$$A=\begin{pmatrix}0\cdots\cdots & a_{1k} & a_{1k+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -a_{1k}\ \cdots & \vdots & a_{k,k+1}\\ -a_{1,k+1},\cdots & -a_{k,k+1} & 0\end{pmatrix}$$

若最后一行(列)元素全为0，则由归纳假设结论可证．否则，不失一般可设 $a_{k,k+1}\neq 0$．用 $a_{k,k+1}^{-1}$ 乘最后一行和最后一列，则 A 合同于

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1k} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{1k} & \cdots & 0 & 1 \\ -b_1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

再利用1，-1将最后一行(列)元素全化为0，则A又合同于

$$D=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & b_{1,k-1} & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ -b_{1,k-1} & \cdots & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

再由归纳假设，D合同于$\mathrm{diag}(C,\cdots,C,0)$．但$A$合同于$D$，由传递性即证.

2）由上面结论，存在可逆阵T，使

$$T'AT=\mathrm{diag}(C,\cdots,C,0) \tag{1}$$

$\therefore$ 秩$(A)=$秩$(C)+\cdots+$秩$(C)=2+\cdots+2=2m$.

3）由(1)式，若$|A|=0$则结论成立．若$|A|\neq 0$则由(1)式有

$$|A|\cdot|T|^2=|C|^m=1$$

$\therefore$ $|A|=\dfrac{1}{|T|^2}=t^2$，其中$t=\dfrac{1}{|T|}$.

(5) 利用标准形

例5 （日本电气通信大学研究生入学试题）证明n阶阵A是幂等阵的充要条件是

$$\text{秩}(A)+\text{秩}(E-A)=n. \tag{1}$$

证　必要性，设$A^2=A$，则A的零化多项式$f(x)=x^2-x$无重根，从而A可对角化，且特征值为0和1．故存在

可逆阵 T，使

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(E_r,0),\tag{2}$$

其中 $r=$秩(A)

$$T^{-1}(E-A)T=\mathrm{diag}(0,E_{n-r})\tag{3}$$

由(2),(3)即证(1).

充分性，设秩$(A)=r$，由满秩分解，则存在秩为 r 的 $n\times r$ 阵 F 和 $r\times n$ 阵 G 使 $A=FG$. 再由第二降阶定理

$$\begin{aligned}\text{秩}(E_n-A)&=\text{秩}(E_n-FG)=\text{秩}(E_n-FE_rG)\\&=\text{秩}(E_n)-\text{秩}(E_r)+\text{秩}(E_r-GE_nF)\\&=n-r+\text{秩}(E_r-GF).\end{aligned}\tag{4}$$

由(1)式

$$\text{秩}(E-A)=n-r.\tag{5}$$

由(4),(5)两式，秩$(E_r-GF)=0$，$GF=E_r$，则

$$A^2=FGFG=FE_rG=FG=A.$$

(6) 利用秩的降阶定理

上面例5的充分性证明即是.

(7) 利用线性空间

例6（南京大学研究生入学试题）设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶复方阵，$A^2=A$，令

$$R(A)=\{X|X=AY,\ Y\text{ 取遍一切 }n\times 1\text{ 复矩阵}\}\tag{1}$$

试证：$R(A)$的维数等于 $\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$.

证 令 K 是复数域，$V=K^n$，则 $R(A)=AV$，且

$$\dim R(A)=\dim AV=\text{秩}(A).\tag{2}$$

再由 $A^2=A$，则存在可逆阵 T，使

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(E_r,0)，\text{其中 } r=\text{秩}(A)\tag{3}$$

由(3)式知

$$\text{秩}(A)=r=tr\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}=tr(T^{-1}AT)=trA=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \quad (4)$$

由(2),(4)两式即证。

§3 矩阵的逆

（一）内容提要

1．对方阵 A，存在方阵 B，使 $AB=BA=E$ 则称 A 是可逆的（非异的，非退化的，满秩的）．并称 B 为 A 的逆，记作 $B=A^{-1}$。

2．n 阶方阵 A 可逆的充要条件是下列任一条件成立：

(1) $|A|\neq 0$;

(2) 秩$(A)=n$;

(3) A 的行（列）向量线性无关；

(4) 方程组 $AX=0$ 只有零解；

(5) A 可经过初等行（列）变换化为单位阵；

(6) A 可表成有限个初等阵的积.

3．伴随阵具有下面性质

(1) $AA^*=A^*A=|A|E$;

(2)
$$\text{秩}(A^*)=\begin{cases}n & \text{秩}(A)=n\\ 1 & \text{秩}(A)=n-1\\ 0 & \text{秩}(A)\leqslant n-2\end{cases};$$

(3) $|A^*|=|A|^{n-1}\quad(n\geqslant 2)$;

(4) $(kA)^*=k^{n-1}A^*\quad$（k 是数，A 为 n 阶阵）；

(5) $(AB)^*=B^*A^*$;

(6) $(A^*)'=(A')^*$.

4．可逆阵的性质

(1) $(A^{-1})^{-1}=A$;

(2) $(A^{-1})'=(A')^{-1}$;

(3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

(4) $(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$ (k 是非零数);

(5) 当 A 可逆时则 A^* 可逆，且

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$$

（二）答疑辅导

1. 怎样证明上面内容提要中的伴随阵的性质?

答 (1) 由乘法直接可证.

(2) 当秩$(A)=n$ 时，则$|A|\neq 0$，由上面 (1)，两边取行列式

$$|A|\cdot|A^*|=|A|^n\neq 0,\ 秩(A^*)=n.$$

当秩$(A)=n-1$时，由(1)式得 $AA^*=0$，从而

$$n=秩A+秩(A^*)\qquad\therefore\qquad 秩(A^*)=1$$

当秩$(A)\leqslant n-2$时，$A^*=0$，秩$(A^*)=0$.

(3) 当$|A|\neq 0$时，由(1)知

$$|A|\cdot|A^*|=|A|^n\quad\therefore\qquad |A^*|=|A|^{n-1}.$$

当$|A|=0$时，秩$(A^*)\leqslant 1$，$\therefore\quad |A^*|=0=|A|^{n-1}$.

(4) 由伴随阵定义直接可证.

(5)（吉林大学研究生入学试题） 证明：$(AB)^*=B^*A^*$.

当$|AB|\neq 0$时，则由公式 $A^*=|A|A^{-1}$，得

$$(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|B|\cdot B^{-1}\cdot|A|\cdot A^{-1}=B^*A^*.$$

结论成立.

当$|AB|=0$时，考虑矩阵 $A(\lambda)=A-\lambda E$，$B(\lambda)=B-\lambda E$. 存在 λ，使

$$|A(\lambda)|\neq 0,\quad |B(\lambda)|\neq 0. \tag{1}$$

则

$$(A(\lambda)B(\lambda))^* = B^*(\lambda)A^*(\lambda). \qquad (2)$$

令

$$(A(\lambda)B(\lambda))^* = (f_{ij}(\lambda))_{n\times n}$$
$$B^*(\lambda)A^*(\lambda) = (g_{ij}(\lambda))_{n\times n}$$

由 (2) 式，则

$$f_{ij}(\lambda) = g_{ij}(\lambda), \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \qquad (3)$$

由于有无穷多个 λ 使(1)式成立，从而有无穷多个 λ 使(3)式成立．但 $f_{ij}(\lambda)$ 与 $g_{ij}(\lambda)$ 都是多项式，从而(3)式对一切 λ 值成立．即证(2)式对一切 λ 值成立．在(2)式中令 $\lambda=0$，则

$$(AB)^* = (A(0)B(0))^* = B^*(0)A^*(0) = B^*A^*.$$

(6) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，则

$$(A^*)' = \begin{pmatrix} A_{11} A_{12} \cdots A_{1n} \\ A_{21} A_{22} \cdots A_{2n} \\ \cdots \quad \cdots \\ A_{n1} A_{n2} \cdots A_{nn} \end{pmatrix} = (A')^*$$

2．分块阵的逆有哪些主要公式？

答 有下面一些公式：

(1) $[\mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_m)]^{-1} = \mathrm{diag}(A_1^{-1}, \cdots, A_m^{-1})$；

(2)
$$\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ A_m & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & & A_m^{-1} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix};$$

(3)
$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix};$$

(4) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} M & H \\ F & G \end{pmatrix}$,

其中 $M = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$,

$H = -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}$,

$F = -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$,

$G = (D - CA^{-1}B)^{-1}$.

上面公式均可按定义直接验证，(4)式称为求逆的第一降阶定理，因为它把高阶矩阵求逆化为低阶求逆．当然上述公式成立的条件必须两边记号均有意义．

（三）题型归类

1．求逆

（1）验证法

例 1 设 $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ 为方阵 A 的零化多项式，若 $a_0 \neq 0$，则 A 可逆．

证 因为

$$0 = f(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

$$A \frac{1}{a_0}(a_m A^{m-1} + \cdots + a_1 E) = E$$

A 可逆，且

$$A^{-1} = \frac{1}{a_0}(a_m A^{m-1} + \cdots + a_1 E) .$$

（2）初等变换法

例 2 求 $n(\geqslant 2)$ 阶阵 A 的逆，其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \cdots 1 \\ 1 & 0 & 1 \cdots 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

解 将(A,E)的各行都加到第一行，再用$\frac{1}{n-1}$乘第1行，这时第1行全为1．再将第1行的-1倍加到其余各行．再将其余各行都加到第1行，最后用-1乘第2, …, n行，便得

$$A^{-1}=\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots\cdots 1 \\ 1 & 2-n & \cdots\cdots 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots\cdots 2-n \end{pmatrix}.$$

(3) 行列式法

例3 （1989年湖北省师范专业大学生数学竞赛题）设

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$ad-bc=1$，求$A^{-1}$

解 由公式$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，则可得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(4) 定义法

例4 （南京大学研究生入学试题）设$A^3=2E$，$B=A^2-2A+2E$，求B^{-1}.

解 $B=A(A+2E)(A-E)$ (1)

由$A^3=2E$，可得

$$E=\left(\frac{1}{2}A^2\right)A, \quad \therefore \quad A^{-1}=\frac{1}{2}A^2. \qquad (2)$$

$A^3+8E=10E$，$(A+2E)(A^2-2A+4E)=10E$

$$\therefore \quad (A+2E)^{-1}=\frac{1}{10}(A^2-2A+4E). \qquad (3)$$

$$E=A^3-E=(A-E)(A^2+A+E),$$

$$(A-E)^{-1}=A^2+A+E. \qquad (4)$$

由(1), (2), (3), (4)及$A^3=2E$，得

$$B^{-1}=(A-E)^{-1}(A+2E)^{-1}A^{-1}=\frac{1}{10}(A^2+3A+4E).$$

(5) 待定系数法

例 5 （清华大学研究生入学试题）设A,B都是 n 阶方阵，$A+B$，$A-B$ 都可逆，$D=\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}$，求 D^{-1}

解 令 $D=\begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}$由 $DD^{-1}=E$ 得

$$\begin{cases}AX_1+BX_3=E, & (1)\\ AX_2+BX_4=0, & (2)\\ BX_1+AX_3=0, & (3)\\ BX_2+AX_4=E. & (4)\end{cases}$$

(1) + (3)得

$$(A+B)(X_1+X_3)=E,\quad X_1+X_3=(A+B)^{-1}. \tag{5}$$

(1) - (3)得

$$X_1-X_3=(A-B)^{-1}. \tag{6}$$

由(5)，(6)得

$$X_1=\frac{1}{2}((A+B)^{-1}+(A-B)^{-1}),$$

$$X_3=\frac{1}{2}((A+B)^{-1}-(A-B)^{-1}).$$

由(2)，(4)类似可得　$X_4=X_1$，$X_2=X_3$.

$$\therefore\quad D^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}M & H\\ H & M\end{pmatrix}$$

其中　$M=(A+B)^{-1}+(A-B)^{-1}$,

$H=(A+B)^{-1}-(A-B)^{-1}$.

(6) 和化积法

例 6 (Sherman—Morrison) 设 A 是 n 阶可逆阵，α 与 β 是 n 维列向量，$1+\beta' A^{-1}\alpha\neq 0$，证明：$A+\alpha\beta'$ 可逆，并

求$(A+\alpha\beta')^{-1}$.

证 $A+\alpha\beta'=A[E-(A^{-1}\alpha)(-\beta')]$, $\quad$ (1)

可以验证

$$(1+\beta'A^{-1}\alpha)(-\beta')=(-\beta')[E-(A^{-1}\alpha)(-\beta')],$$

$$(-\beta')=(1+\beta'A^{-1}\alpha)^{-1}(-\beta')[E-A^{-1}\alpha(-\beta')],$$

$$\begin{aligned}E&=[E-A^{-1}\alpha(-\beta')]+A^{-1}\alpha(-\beta')\\&=[E-A^{-1}\alpha(-\beta')]+A^{-1}\alpha[(1+\beta'A^{-1}\alpha)^{-1}(-\beta')\times\\&\quad(E-A^{-1}\alpha(-\beta'))]\\&=[E+A^{-1}\alpha(1+\beta'A^{-1}\alpha)^{-1}(-\beta')](E-A^{-1}\alpha(-\beta'));\end{aligned}$$

$$\therefore\quad (E-A^{-1}\alpha(-\beta'))^{-1}=E+A^{-1}\alpha(1+\beta'A^{-1}\alpha)^{-1}(-\beta'). \tag{2}$$

由(1)式知$A+\alpha\beta$可逆，且

$$\begin{aligned}(A+\alpha\beta')^{-1}&=[E-(A^{-1}\alpha)(-\beta')]^{-1}A^{-1}\\&=A^{-1}-\frac{1}{1+\beta'A^{-1}\alpha}(A^{-1}\alpha\beta'A^{-1}).\end{aligned}$$

(7) 分块法

例 7 设

$$A=\begin{pmatrix}0 & a_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$, 求A^{-1}.

解 将A分块成 $\quad A=\begin{pmatrix} & B\\ a_n & \end{pmatrix}$, $B=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_{n-1})$,

则由分块公式得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} & a_n^{-1}\\ B^{-1} & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\cdots 0 & a_n^{-1}\\ a_1^{-1} & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0\ \ a_{n-1}^{-1} & 0\end{pmatrix}.$$

（8）利用特征多项式

例 8　（四川大学研究生入学试题）设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

试用哈密尔顿—凯莱定理，求 A^{-1}.

解　$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^3-2\lambda^2-3$,

$A^3-2A^2-3E=0$,

$$A\left(\frac{1}{3}A^2-\frac{2}{3}A\right)=E,$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}(A^2-2A)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

2．证明关于逆的等式

例 9　（甘肃大学研究生入学试题）证明：

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}. \qquad (1)$$

证　由于等式

$$(A+B)(A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1})=E,$$

从而(1) 式成立.

例10　（东北师大研究生入学试题）设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$满足条件：

$$a_{ii}=1\ (i=1,2,\cdots,n),\ |a_{ij}|<\frac{1}{n-1}\quad (i\neq j)$$

证明A 有逆矩阵.

证　由设知 A 为严格对角占优矩阵，因为

$$\sum_{i\neq j}|a_{ij}|<(n-1)\times\frac{1}{n-1}=1=|a_{ii}|,\ (i=1,2,\cdots,n)$$

从而 A 为可逆阵.

3．解方程组

例11 解线性方程组 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

解

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

当然也可以不必先求逆，用初等行变换把矩阵(A,B)的左边A化成E，右边的B便化成$A^{-1}B$，即

$$(A,B)\longrightarrow(E,A^{-1}B).$$

4．关于伴随阵

例12 试求满足$(A^*)^*=A$的一切n阶方阵.

解 我们先证（天津师大研究生入学试题）

$$(A^*)^*=|A|^{n-2}A\quad(n\geqslant 2)\tag{1}$$

当$|A|\neq 0$时，由

$$A^*(A^*)^*=|A^*|E=|A|^{n-1}E,\tag{2}$$

$$AA^*=|A|E,\ A^*=|A|A^{-1}\tag{3}$$

由(2)，(3)即证(1)式.

当$|A|=0$时，只需证明$(A^*)^*=0$. 当$n>2$时，由于秩$(A^*)\leqslant 1$，故$(A^*)^*=0$；当$n=2$时，设

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

则

$$A^*=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix},\quad (A^*)^*=A=|A|^{n-2}A(因n=2).$$

(1)式仍成立.

再求$(A^*)^*=A$的解A. 由(1)式则求解

$$|A|^{n-2}A=A \quad 或 \quad (|A|^{n-2}-1)A=0, \qquad (4)$$

因此，当$|A|^{n-2}=1$时，A可以为一切n阶方阵；当$|A|^{n-2}\neq 1$时，$A=0$.

§4 分块矩阵

（一）内容提要

1．矩阵一般可以进行多种分块方法，常见有以下几种特殊分块法

（1）按列分块

$B=(B_1,B_2,\cdots,B_m)$，其中B_i为列向量，则

$$AB=A(B_1,\cdots,B_m)=(AB_1,\cdots,AB_m).$$

（2）按行分块

$$AB=\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} A_1B \\ \vdots \\ A_nB \end{pmatrix},$$ 其中A_i为A的行向量，

（3）按行按列分块

$$AB=(A_1A_2\cdots A_m)\begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}=A_1B_1+\cdots+A_mB_m.$$

（4）分成4块

$$A=\begin{pmatrix} B & C \\ D & M \end{pmatrix}.$$

（5）整个矩阵算一块.

（6）每个元素算一块.

2．分块矩阵在有意义的情形下可以相加（减），相乘

和数乘.

分块阵的秩和逆的求法在本章§2，§3已经给出.

（二）答疑辅导

1. 什么叫广义初等矩阵和广义初等变换？

答 下面一些矩阵称为广义初等阵：

$$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C & \\ & E_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_m & \\ & C \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_m & D \\ 0 & E_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ F & E_n \end{pmatrix}$$

其中 E_k 表示 k 阶单位阵，C 是 n 阶可逆阵，D 和 F 是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵.

用上述矩阵左（右）乘 $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$，相当于对 A 作一次分块的行（列）初等变换，比如

$$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_3 & A_4 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_2 & A_1 \\ A_4 & A_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

这种变换称为广义初等变换.

2. 广义初等变换是否改变矩阵的秩？当为方阵时是否改变行列式的值呢？

答 由于广义初等阵均为可逆阵，因此无论左乘或右乘某一矩阵都不会改变其秩. 但行列式值可能会改变. 这从上一问中（1），（2）两式就可看出.

（三）题型归类

1. 求行列式的值

例1 设 A，B，C，D 都是 n 阶方阵，且 $AC=CA$，证

明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|. \tag{1}$$

证　当$|A|\neq 0$时，则

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}, \tag{2}$$

两边取行列式

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A|\cdot|D-CA^{-1}B|$$

$$=|AD-ACA^{-1}B|=|AD-CB|.$$

当$|A|=0$时，取x使　$|A+xE|\neq 0$，但

$$(A+xE)C=C(A+xE),$$

由上述结论

$$\begin{vmatrix} A+xE & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(A+xE)D-CB| \tag{3}$$

由于对任意x，(3)式都成立，从而(3)式为恒等式. 令$x=0$，即证(1)式.

2．求秩

例2　（东北工学院研究生入学试题）　设A，B，C，D为n阶方阵，$AC=CA$，$AD=CB$，且$|A|\neq 0$，若

$$G=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

求证　$n\leqslant$秩$(G)<2n$.

证　由上面例1知　$|G|=|AD-CB|=0$，故秩$(G)<2n$. 而$|A|\neq 0$，故　秩$(G)\geqslant n$.

3．求特征值

例3　（清华大学研究生入学试题）　求$A=\begin{pmatrix} 0 & J_n \\ J_n & 0 \end{pmatrix}$

的全部特征值，其中 J_n 是每一元素都是 1 的 n 阶方阵.

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda E & -J_n\\ -J_n & \lambda E\end{vmatrix}$, (1)

但是

$$\begin{pmatrix}E & E\\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda E & -J_n\\ -J_n & \lambda E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & -E\\ 0 & E\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda E-J_n & 0\\ -J_n & \lambda E+J_n\end{pmatrix} \tag{2}$$

将（2）式两边取行列式得

$$|\lambda E-A|=|\lambda E-J_n|\cdot|\lambda E+J_n|,$$

$$|\lambda E-J_n|=\lambda^{n-1}(\lambda-n),$$

$$|\lambda E+J_n|=\lambda^{n-1}(\lambda+n).$$

$$\therefore\quad |\lambda E-A|=\lambda^{2n-2}(\lambda-n)(\lambda+n).$$

则 A 的特征值为

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_{2n-2}=0,\ \lambda_{2n-1}=n,\ \lambda_{2n}=-n.$$

4. 求逆

例4 （大连工学院研究生入学试题） 正定分块矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$的逆矩阵为 $B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$，其中$A_{ii}$，$B_{ii}$ $(i=1,2)$ 均为 m_i 阶方阵，证明

$$A_{11}^{-1}=B_{11}-B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}. \tag{1}$$

证 由 $AB=E$ 得

$$A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=E, \tag{2}$$

$$A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=0, \tag{3}$$

由（3）得

$$A_{11}B_{12}B_{22}^{-1}=-A_{12} \tag{4}$$

（4）式两端右乘 B_{21}，左乘 A_{11}^{-1} 得

$$B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}=A_{11}^{-1}(-A_{12}B_{21})$$

$$=A_{11}^{-1}(A_{11}B_{11}-E)=B_{11}-A_{11}^{-1}.$$

移项后即证（1）式.

§5 特殊矩阵

（一）内容提要

1．零矩阵，数量矩阵 kE，对角阵，上(下)三角阵，准对角阵，对称阵，反对称阵等均是已知的特殊矩阵．下面仅列举一些常用的运算性质

（1）两个上三角阵（下三角阵，对角阵，对称阵，反对称阵，准对角阵）之和仍为上三角阵．（其它也是）

（2）上(下)三角阵可逆的充要条件是主对角线元全不为0．且它的逆也是上(下)三角阵，即

$$\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

（3）对称（反对称）阵的逆仍是对称（反对称）阵.

2．常见的特殊矩阵还有：

（1）$AA'=A'A=E$，称实方阵 A 为正交阵；

（2）$A\bar{A}'=\bar{A}'A=E$，称复方阵 A 为酉阵；

（3）$\bar{A}'=A$，称复方阵 $\bar{A}$ 为厄米特（Hermite）阵；

（4）$A^2=A$，称 A 为幂等阵；

（5）$A^2=E$，称 A 为对合阵，$A^m=E$，称 A 为幂么阵；

（6）n 阶方阵 $A=E-2\beta\beta'$ 称为实（复）镜象阵，其中 β 为实(复)的 n 维列向量，且 $\beta'\beta=1$；

（7）方阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & \ddots & & -a_{n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

称为弗洛扁尼斯（Frobenius）阵（它的性质在第8章中介绍）；

（8）方阵
$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$
称为循环阵；

（9）
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ & a_{32} & \cdots & & a_{3n} \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} (a_{ij}=0,\ i>j+1)$$
称为 Hessenbery 阵；

（10）方阵 A 的每行每列中正好有一个为1，其余均是0，称 A 为置换阵；

（11）行列式模为1的方阵称为幺模矩阵.

（12）
$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$$
称为若当（Jordan）块.

（二）答疑辅导

1．幂等矩阵有哪些主要性质？

答 （1）幂等阵 A 有如下等价条件：

1）$A^2=A$；

2）存在可逆阵 T，使 $T^{-1}AT=\text{diag}(E_r,0)$，其中 $r=$ 秩(A)；

3）秩$(A)+$秩$(E-A)=n$；

4）设 $g(\lambda)$ 为 A 的最小多项式，则 $g(x)=x$ 或 $x-1$ 或

x^2-x；

其它证明是显然的，1）与3）等价性在p.81本章§2例5给出.

（2）幂等阵 $A=(a_{ij})$ 的其它性质：

1）A 的特征值只能是1或0；

2）秩$(A)=\mathrm{tr}\,A=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

3）$W_1=\{Z\,|\,AZ=0\}$，$W_2=\{X\,|\,(A-E)X=0\}$ 则

$$P^n=W_1\oplus W_2$$

其中3）的证明见p.177第五章§4例3.

2. 幂零阵有哪些主要性质?

答 （1）幂零阵 A 的等价条件如下：

1）存在自然数 m，使 $A^m=0$（若 m 是最小自然数，则称 m 为 A 的幂零指数）；

2）A 的 Jordan 标准形为 $\mathrm{diag}(J_1,J_2,\cdots,J_s)$，其中$J_i$为主对角线元素为0的 Jordan 块.

3）$|\lambda E-A|=\lambda^s$（即特征值全为0）；

4）λ^t 为 A 的零化多项式.

其中1)、3)、4）互相等价是容易证明的，下证1）、2）等价.

设 $A^m=0$，则 A 的特征值全为0，从而由 Jordan 标准形可知，A 相似于 $\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_s)$，且 J_i 为主对角元为0的 Jordan 块.

反之，设 $A\sim\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_s)$，则存在可逆阵 T，使

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_s). \tag{1}$$

设

$$J_i=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}_{n_i\times n_i}\qquad (i=1,2,\cdots,s) \tag{2}$$

并令 $m=\max(n_1, n_2, \cdots, n_s)$，则

$$J_i^m=0 \quad (i=1,2,\cdots,s), \qquad \therefore \qquad A^m=0.$$

并且 m 是 A 的幂零指数.

(2) 幂零阵 A 还有以下一些性质

1) A 的特征值全为0；

2) A 可对角化的充要条件其幂零指 数为1（即 Jordan 形中，每一 Jordan 块为1阶阵）；

3) $|A|=0$，从而 A^{-1}不存在；

4) A'，kA（k 为数）为幂零阵；

5) 幂零指数不超过阶数.

6) A^*也是幂零阵.

由上面幂零阵 A 的 Jordan 标准形不难验证 1)，2)，3)，5). kA 与 A' 也由上面 Jordan 标准形可证是幂零阵. 下 面 只 证 明 6）.

由于 $|A|=0$，秩$(A^*)\leqslant 1$. 当秩$(A^*)=0$时，则$A^*=0$. A^*是幂零阵. 当秩$(A^*)=1$时，则秩$(A)=n-1$. 由 A 的若当标准形知

$$A=T^{-1}J_0T \tag{1}$$

其中

$$J_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

由（1）式则由公式 $(BC)^*=C^*B^*$ 得

$$A^*=T^*J_0^*(T^{-1})^*,$$

$$(A^*)^2=T^*(J_0^*)^2(T^{-1})^*. \tag{2}$$

$$J_0^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$(J_0^*)^2 = 0, \qquad (A^*)^2 = 0.$$

3．幂幺阵有哪些主要性质？

答　若 $A^m = E$，则有下面一些主要性质：

(1) A 有零化多项式 $x^m - 1$；

(2) A 相似对角方阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$，其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值，且

$$\lambda_i^m = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

换句话说 A 的特征值都为 m 次单位根．特别若 A 有实特征值一定是 ± 1.

(3) A 可逆，且 $A^{-1} = A^{m-1}$.

4．反对称阵有哪些主要性质？

答　(1) 反对称阵 A 有如下等价条件？

1) $A' = -A$

2) A 合同于 $B = \mathrm{diag}(C, \cdots, C, 0)$，其中 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) 对任何 n 维列向量 x 恒有 $x'Ax = 0$.

1) 与 3) 等价容易验证．1) 与 2) 等价由本章 §2 例 4 可得．

(2) 反对称阵 A 还有以下主要性质：

1) 秩(A)等于偶数；

2) $|A| = k^2$(k 为常数)，特别当 A 的阶数为奇数时，

$|A|=0$.

3）实反对称阵的特征值是纯虚数或0，

4）当 $A=(a_{ij})$ 是实反对称阵时，

$$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\operatorname{tr}A=0$$

4）A', lA，仍为反对称阵.

5）当 $|A|\neq 0$ 时，A^* 为反对称阵.

其中 1),2)的证明见本章§2例4．3）的证明见p.203第6章§2例13．再由定义容易验证4）．下证5）．

由 $A^*=|A|A^{-1}$，则

$$(A^*)'=|A|(A^{-1})'=|A|(A')^{-1}=-|A|A^{-1}=-A^*$$

我们指出：当 $|A|=0$ 时，A^* 不一定是反对称阵，比如

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix},\quad\therefore\quad A^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

5．循环阵有哪些主要性质？

答　形如

$$S=\begin{pmatrix}0&E_{n-1}\\1&0\end{pmatrix}$$

为 n 阶基本循环阵，其中 E_{n-1} 为 $n-1$ 阶单位阵．称

$$A=\begin{pmatrix}a_0&a&\cdots&a_{n-1}\\a_{n-1}&a_0&\cdots&a_{n-2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_1&a_2&\cdots&a_0\end{pmatrix},$$

为 n 阶循环阵．则 S 和 A 有如下性质：

1）$S^k=\begin{pmatrix}&E_{n-k}\\E_k&\end{pmatrix}$，$(k=1,2,\cdots,n-1)$．$S^n=E$；

2）设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{k-1}$，则 $A=f(S)$；

3）S 与 A 可同时对角化；

4）A 的特征值为 $f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), \cdots, f(\varepsilon_n)$ 其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为 x^n-1 的全部 n 次单位根；

5）$|A|=f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n)$；

6）同级环阵的和（或积）均为循环阵；

7）同级循环阵之积一定可换；

8）可逆循环阵的逆仍为循环阵；

9）所有同级循环阵一定可以同时对角化．

下面我们来证明上述性质．1）可以直接验证．由 1）可证

$$A=a_0E+a_1S+\cdots+a_{n-1}S^{n-1}=f(S) \qquad (2)$$

令 x^n-1 的 n 个单位根为 $1=\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$，令

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_2^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

则

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(f(1), f(\varepsilon_2), \cdots, f(\varepsilon_n)). \qquad (3)$$

由(3)有

$$T^{-1}ST=\mathrm{diag}(g(1), g(\varepsilon_2), \cdots, g(\varepsilon_n)), \qquad (4)$$

其中 $g(x)=x$．故

$$T^{-1}ST=\mathrm{diag}(1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n).$$

由(3)，(4)可证 3），4），5）．

再证 6）和 7）设

$$A=a_0E+a_1S+\cdots+a_{n-1}S^{n-1}$$
$$B=b_0E+b_1S+\cdots+b_{n-1}S^{n-1}$$

注意到 $S^n=E$，则可证

$$AB=BA=c_0E+c_1S+\cdots+c_{n-1}S^{n-1}$$

即证 6),7)．类似于(3)式有

$$T^{-1}BT=\mathrm{diag}(h(1),h(\varepsilon_2),\cdots,h(\varepsilon_n)) \qquad (6)$$

其中

$$h(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}$$

这就是说同一个 T，使 A,B 同时相似于对角阵即证 9)．

最后证8)．设 A 的逆为 B，令

$$B=b_0E+b_1S+\cdots+b_{n-1}S^{n-1}$$

由 $AB=E$，并由 $S^n=E$，那么

$$\begin{aligned}E=AB&=(a_0E+a_1E+\cdots+a_{n-1}S^{n-1})\cdot\\&\quad(b_0E+b_1S+\cdots+b_{n-1}S^{n-1})\\&=(a_0b_0+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1)E+\cdots+\\&\quad(a_{n-1}b_0+\cdots+a_0b_{n-1})S^{n-1}\end{aligned}$$

得非齐次线性方程组

$$AX=(1,0,\cdots0)' \qquad (5)$$

其中 $X=(b_0,b_1,\cdots,b_{n-1})'$．由于$|A|\neq0$，$X$ 有非零解．从而得到 B 为循环阵．

6. 置换阵有哪些主要性质？

答　设 A 为置换阵，则有以下一些主要性质：

1) $|A|=1$ 或 -1；

2) A 是幂幺阵；

3) A 的特征值为 m 次单位根；

4) A 相似于对角阵，主对角线元为单位根；

5) A 左(右)乘方阵 B 相当于对 B 作行(列)置换变换．

我们来证明上述性质．

设 $A=(a_{ij})$　$a_{ki_k}=1,(k=1,2,\cdots,n)$，其余$a_{ij}=0$．(1)

则$|A|=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}=\pm1$．即证 1)．

再证 2），考虑

$$A, A^2, \cdots, A^m \cdots\cdots \qquad (2)$$

因为由 0,1 两个数字构成的 n 阶方阵，只能构造出有限个，从而一定存在 $s>t$，使

$$A^s = A^t, \quad A^{s-t} = E.$$

即证 $A^m = E$（m 为自然数），即 A 为幂幺阵.

由 A 为幂幺阵即证 3），4）.

最后证明 5）. A 仍设为(1)式所给，设 $B = (b_{ij})$

$$AB = \begin{pmatrix} b_{i_1 1} \cdots b_{i_1 n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ b_{i_n 1} \cdots b_{i_n n} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

(3)式右端对 B 作了重新排列，分别将原矩阵 B 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 行放在第 $1,2,\cdots,n$ 行.

类似可证 $BA=C$，其中 C 是将 B 的第 $1,2,\cdots n$ 列放在第 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 列.

7. 什么叫 n 维标准单位向量？它们有什么重要性质？

答 $e_1 = (1,0,\cdots 0)'$, $e_2 = (0,1,\cdots,0)'$, $\cdots$, $e_n = (0,\cdots 0,1)'$. 称为 n 维标准单位向量组. 它们具有下面性质：

(1) $e'_i e_j = \delta_{ij}$，其中 $\delta_{ii} = 1$，$\delta_{ij} = 0 (i \neq j)$

(2) $A = (a_{ij})$ 为 n 阶方阵，且

$A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为列向量，

$A = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$，其中 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 为行向量，

则

$$Ae_j = \alpha_j \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$e'_i A = \beta_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$e'_i A e_j = a_{ij} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

这些性质直接乘可证得.

关于正交阵和酉阵的一些主要性质，我们将在第八章中讨论.

（三）题型归类

1．判断矩阵类型

例1 设 $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$ 问 a,b,c 为何值时

1）A 为可逆阵；

2）A 为对称阵；

3）A 为反对称阵；

4）A 为正交阵；

5）A 为幂等阵.

解 1）$ab\neq0$ 时 A 可逆.

2）$c=0$，a,b为任何数时，$A'=A$.

3）$a=b=c=0$ 时，A 为反对称阵$(A=0)$.

4）$a=\pm1,b=\pm1,c=0$ 时，A 为正交阵.

5）由 $A^2=A$，得

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ac+bc, & b^2 \end{pmatrix}$$

所以 $a=0$ 或 1，$b=0$ 或 1

$$ac+bc=c \tag{1}$$

当 $a=b=0$ 时，只有 $c=0$，A 才是幂等阵.

当 $a=1$，$b=0$ 时，c 为任何数，A 都是幂等阵，

当 $a=0$，$b=1$ 时，c 为任何数，A 也是幂等阵.

当 $a=b=1$ 时，$c=0$，A 才是幂等阵.

2．求特殊阵 A

例2 （北方交通大学研究生入学试题）求实二阶阵 A，

使 $A^2=0$.

解 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，由 $A^2=0$ 得

$a^2+bc=0$，$b(a+d)=0$，$c(a+d)=0$，$d^2+bc=0$.

当 $b=c=0$ 时，得 $A=0$.

当 $b\neq 0$ 时，$a+d=0$，得

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}.$$

当 $c\neq 0$ 时，$a+d=0$ 得

$$A=\begin{pmatrix} a & -\frac{a^2}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

3．证明特殊阵的充要条件

例3 （浙江大学研究生入学试题） 设 A 是秩为 r 的 n 阶方阵.

(1) 证明 $A^2=A$ 的充要条件是存在秩为 r 的 $n=r$ 矩阵 C，使得 $A=CB$，$BC=E_r$. 其中 E_r 为 r 阶单位阵.

(2) 当 $A^2=A$ 时，证明：$|A-E|=2^{n-r}$，$|A+E|=2^r$.

证 (1) 若 $A^2=A$，则存在可逆阵 T，使得

$$A=T^{-1}\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}T=T^{-1}\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}(E_r,0)T=CB, \qquad (1)$$

其中 $C=T^{-1}\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$，$B=(E_r,0)T$ 分别为秩为 r 的 $n\times r$ 和 $r\times n$ 矩阵.

$$BC=(E_r,0)TT^{-1}\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}=E_r.$$

再证充分性，由假设

$$A^2=CBCB=CE_rB=CB=A.$$

(2) 由于 $A=T^{-1}\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}T$

$$A+E=T^{-1}\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}T+T^{-1}\begin{pmatrix}E_r & \\ & E_{n-r}\end{pmatrix}T$$

$$=T^{-1}\begin{pmatrix}2E_r & \\ & E_{n-r}\end{pmatrix}T,$$

两边取行列式，$|A+E|=2^r$.

另一式同理可证.

§6 综合题

例1 （1989年湖北省师范专业大学生数学竞赛题） 设 S 是一些 n 阶方阵组成的集合，对任意 $A,B\in S$，有 $AB\in S$，$(AB)^3=BA$. 求证：S 满足交换律.

证 由假设任取 $A,B\in S$，则

$$AB=(BA)^3=[(AB)^3]^3=(AB)^9.$$

$$BA=(AB)^2(AB)=[(AB)(AB)^2]^3=(AB)^9=AB.$$

例2 （第三届全国大学生数学夏令营试题）设 L_1,L_2,L_3 是线性空间，α：$L_1\longrightarrow L_2$ 及 β：$L_2\longrightarrow L_3$ 是线性映射. 试证

$$\dim\alpha(L_1)+\dim\beta(L_2)\leqslant\dim\beta(\alpha(L_1))+\dim L_2. \tag{1}$$

证 设 $\dim L_1=s$，$\dim L_2=n$，$\dim L_3=m$. 且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 以及 $\gamma_1,\cdots,\gamma_m$ 分别为 L_1,L_2,L_3 的一组基. 和线性变换在一组基下矩阵类似，对线性映射 α 和 β，则有

$$\alpha(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)B \tag{2}$$

$$\beta(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)A \tag{3}$$

其中 B 为 $n\times s$ 矩阵，A 为 $m\times n$ 矩阵.

$\alpha(L_1)$，$\beta(L_2)$ 分别为值域，和线性变换类似

$$\dim \alpha(L_1) = 秩(B), \quad \dim \beta(L_2) = 秩(A). \tag{4}$$

$$\beta(\alpha(\alpha_1 \cdots \alpha_s)) = \beta[(\beta_1, \cdots, \beta_n) B]$$
$$= [\beta(\beta_1 \cdots \beta_n)] B = (\gamma_1 \cdots \gamma_n)(AB),$$
$$\therefore \quad \dim \beta(\alpha(L_1)) = 秩(AB). \tag{5}$$

因此要证的(1)式变为

$$秩(B) + 秩(A) \leqslant 秩(AB) - n.$$

这是熟知的 Sylvester 公式（见p.77本章§2答疑辅导3）.

例3 (Szaraki—Wazewski) 设 A 与 B 为 n 阶实方阵，证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = |A + iB| \cdot |A - iB|. \tag{1}$$

证 利用广义初等变换，由

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -iE & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ iE & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+iB & B \\ 0 & A-iB \end{pmatrix}$$

两边取行列式即证(1).

例4 1) 设 A 是 n 阶对合阵($A^2 = E$)，则

$$秩(A+E)^m + 秩(A-E)^k = n. \tag{1}$$

2) 设 A 是 n 阶幂等阵，则

$$秩(A^m) + 秩(A-E)^k = n. \tag{2}$$

其中 m, k 是任意自然数.

证 (1)，(2)证法类似，只证(1). 由 $A^2 = E$，则可对角化，由于 A 的特征值只能是±1，故存在逆阵 T，使

$$A = T^{-1}\begin{pmatrix} E_s & \\ & -E_{n-s} \end{pmatrix} T \tag{3}$$

$$(A+E)^m = T^{-1}\begin{pmatrix} 2^m E_s & \\ & 0 \end{pmatrix} T, \tag{4}$$

$$(A-E)^k=T^{-1}\begin{pmatrix}0 & \\ & (-2)^kE_{n-s}\end{pmatrix}T. \tag{5}$$

由(4)，(5)得

$$秩(A+E)^m=s，秩(A-E)^k=n-s.$$

即证(1).

例5 （华东师大研究生入学试题） 若$B_{n\times m}A_{m\times n}=E_n$，则称 B 是 A 的一个左逆. 证明：

1) 实矩阵 A 有左逆的充要条件是 A 的列线性无关；

2) 实矩阵 A 的左逆唯一的充要条件是 A 可逆.

证 1) 设$BA=E$，则

$$n=秩(BA)\leqslant秩(A)\leqslant n \quad \therefore 秩(A)=n.$$

A 的列向量线性无关.

反之，A 的列线性无关，秩$(A)=n$. 所以

$$秩(A'A)=秩(A)=n.$$

令 $B=(A'A)^{-1}A'$. 有 $BA=E_n$.

2) 设 A 可逆，$A^{-1}A=E$，A^{-1} 是 A 唯一的左逆.

反之，设 $A_{m\times n}$ 的唯一左逆为 $B_{n\times m}$. 由 $BA=E_n$ 得

$$E_n=A'B'=A'(B_1,\cdots,B_n)=(A'B_1,\cdots,A'B_n).$$

其中 $B'=(B_1,\cdots,B_n)$. 于是

$$A'B_i=e_i', \quad e_i=(0\cdots1\quad0\cdots0)'$$

为标准单位向量，但 B 唯一，即 $A'B_i=e_i$ 的解唯一，从而 $A'X=0$ 只有零解.

又 $AA'X=0$ 与 $A'X=0$ 同解，故 $A'AX=0$ 只有零解. 即$|AA'|\neq0$. 由此得

$$m=秩(AA')=秩(A).$$

但由1) 有秩$(A)=n$. 所以 $m=n$，即 A 为方阵，且 A 可逆.

例6 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的顺序主子式全不为 0，则存在可逆下三角阵 B 与可逆上三角阵 C，使 $A=BC$.

证 对 n 作数学归纳法，当 $n=1$时，结论显然成立. 归纳假设结论对 $n-1$ 成立. 令

$$A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{n-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$, $\alpha=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix}$

$$\beta=\begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

因 $|A_{n-1}|\neq 0$，则

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\beta' A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \beta' & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ 0 & a_{nn}-\beta' A_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix}$$

两边取行列式，得

$$|A|=|A_{n-1}|\cdot|a_{nn}-\beta' A_{n-1}^{-1}\alpha|.$$

由此知 $d=a_{nn}-\beta' A_{n-1}^{-1}\alpha\neq 0$.再由归纳假设知 $A_{n-1}=B_1C_1$，其中 B_1, C_1 分别为 $n-1$ 阶可逆上、下三角阵.

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ 0 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1C_1 & \alpha \\ 0 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & B_1^{-1}\alpha \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\beta' A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & B_1^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=BC.$$

其中

$$C=\begin{pmatrix} C_1 & B_1^{-1}\alpha \\ 0 & d \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\beta' A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

可证 B, C 分别是可逆上、下三角阵.

例7 1）设$A=\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，且 $a_1, \cdots, a_n$ 两两不同，证明：与 A 可换的矩阵只能是对角阵。

2）设 $A=\mathrm{diag}(a_1E_1, a_2E_2, \cdots, a_mE_m)$，其中 $a_1, \cdots, a_m$ 互不相同．E_i 是 n_i 级单位阵 $\sum_{i=1}^{m} n_i=n$，证明：与 A 可交换的矩阵只能是准对角阵．

证 1）设 n 阶阵 $X=(x_{ij})$满足$AX=XA$，则有

$$a_ix_{ij}=a_jx_{ij} \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

因为 $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ 则由(1)式得

$$x_{ij}=0 \ (i \neq j)$$

于是 X 为对角阵．

2）设

$$X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mm} \end{pmatrix}$$

满足 $AX=XA$．

其中 X_{ii} 为 n_i 级方阵$(i=1, 2, \cdots, m)$．从而有

$$a_iE_iX_{ij}=X_{ij}a_jE_j \text{ 或 } a_iX_{ij}=a_jX_{ij}$$

由 $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ 所以 $X_{ij}=0$ $(i \neq j)$．即证 X 为准对角阵．

例8 （武汉大学研究生入学试题）1）设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 m 个 n 级方阵，

$$A_iA_j=A_jA_i \quad (i, j=1, 2, \cdots, m) \tag{1}$$

且每个 A_i 都与对角阵相似，则存在同一个可逆阵 T，使 $T^{-1}A_iT$ 同时为对角阵$(i=1, 2, \cdots, m)$．

2）设 S 是由无限多个 n 级方阵所成集合，且 S 中每个矩阵相互是可交换的．又 S 中每个矩阵能与对角阵相似，则存在同一个可逆阵 T，使得对于 S 的任一矩阵 X，恒有

$T^{-1}XT$ 为对角阵、

证 1）对 m 用数学归纳法．当 $m=1$ 时结论成立．归纳假设结论对 $k-1$ 成立．再证 k 时，由于 A_1 与对角阵相似，存在可逆阵 P，使

$$P^{-1}A_1P=\mathrm{diag}(a_1E_1,\cdots,a_sE_s) \tag{1}$$

其中 $a_1,\cdots,a_s$ 互不相同，E_i 为 n_i 级方阵 $\sum_{i=1}^{s}n_i=n$.

由 $A_iA_j=A_jA_i$ 则有

$$(P^{-1}A_1P)(P^{-1}A_jP)=(P^{-1}A_jP)(P^{-1}A_1P). \quad (j=2,3,\cdots,m) \tag{2}$$

由上面例7知

$$P^{-1}A_jP=\mathrm{diag}(B_1^{(j)},\cdots,B_s^{(j)}). \quad (j=2,3,\cdots,m) \tag{3}$$

为准对角阵，其中 $B_k^{(j)}$ 为 n_k 级方阵.

另外，由于每个 A_i 可对角化，它的初等因子都是一次的．由(3)式知 $B_k^{(j)}$ 的初等因子均为 A_j 的初等因子，因此 $B_k^{(j)}$ 初等因子也是一次的，故 $B_k^{(j)}$ 都可对角化．由归纳假设，存在可逆阵 R_k $(k=2,\cdots,m)$，使

$$R_k^{-1}B_k^{(j)}R_k \quad (j=2,\cdots,m,\ k=1,2,\cdots,s)$$

同时对角化．令

$$R=\mathrm{diag}(R_1,\cdots,R_s)$$

则
$$R^{-1}(P^{-1}A_jP)R=\mathrm{diag}(R_1^{-1}B_1^{(j)}R_1,\cdots,R_s^{-1}B_s^{(j)}R_s) \quad (j=2,\cdots,m) \tag{4}$$

且（4）式右端为对角阵.

另一方面，

$$R^{-1}(P^{-1}A_1P)R=\mathrm{diag}(R_1^{-1}a_1E_1R_1,\cdots,R_s^{-1}a_sE_sR_s)$$

也是对角阵，故令 $T=PR$ 即证.

2）由于 S 是线性空间 $P^{n\times n}$ 的子集合．故秩 $(S)\leqslant n^2$.

令秩$(S)=m$. 设$X_1,\cdots,X_m$为S的极大无关组. 则由假设及上面命题，则存在可逆阵T，使

$$T^{-1}X_iT \qquad (i=1,2,\cdots,m), \tag{5}$$

同时为对角阵.

任取$X\in S$，则$X=k_1x_1+\cdots+k_mX_m$，由(5)式即证$T^{-1}XT$为对角阵.

例9 （日本东京工业大学研究生入学试题）设A,B，X_n $(n=0,1,\cdots)$都是3阶方阵，$X_{n+1}=AX_n+B$当

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad X_0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

时，求X_n.

解 由$X_k-X_{k-1}=A^{k-1}X_1$，而$X_1=B=E$. 所以

$$X_n=E+A+A^2+\cdots+A^{n-1} \tag{1}$$

因为$A^2=A'$，$A^3=E$. 则由(1)式得

$$X_n=\begin{cases}mP & \text{当 } n=3m \text{ 时},\\ mP+E & \text{当 } n=3m+1 \text{ 时},\\ mP+E+A & \text{当 } n=3m+2 \text{ 时}.\end{cases}$$

其中

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

第四章　多　项　式

§1　运算与性质

（一）　内容提要

1．数域P上文字x的多项式是指形式表达式：

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\qquad(a_i\in P)$$

当$a_n\neq0$时，$f(x)$的次数为n，记为$\partial(f(x))=n$．零多项式次数不定义次数．非零常数都为零次多项式．

2．多项式的加（减）法是把同次项对应系数相加(减)．多项式的乘法是把一个多项式的各项乘另一个多项式每一项，然后再合并同类项．

3．多项式的加法和乘法满足交换律、结合律和分配律．另外还满足

(1)　消去律　设$f(x)g(x)=f(x)h(x)$，且$f(x)\neq0$则$g(x)=h(x)$．

(2)　次数律　设$f(x)g(x)\neq0$，则

1)　当$f(x)\pm g(x)\neq0$时，

$$\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant\max(\partial(f(x)),\partial(g(x)))$$

2)　$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$．

（二）　答疑辅导

1．高代中多项式与中学讲的多项式有无区别？

答　至少有下面三点不同：

(1)　中学里把x看作变数，这里把x看作文字，它比变数

的意义更广，它可以理解为变数，也可以理解为别的，比如矩阵、线性变换等．

(2) 中学里把多项式看作单项式的代数和，因而有单项与多项式之分．高代中把单项式（甚至一个数！）也看作多项式，因而无单项式与多项式之分．

(3) 中学里把多项式看成函数，这里把多项式看作形式表达式．这里的“＋”号并不意味着“加”，$a_i x^i$并不意味着a_i乘以x^i．

2．多项式相等与方程有无区别？

答　有．比如

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

把(1)式看作多项式相等，必有$a=b=c=0$．若把(1)式看作方程，不要求$a=b=c=0$．

3．零多项式能否定义次数？

答　能，有些书上定义零多项式次数为$-\infty$．但大多数书上不定义次数．主要应当分清0与非零常数两者之间的区别，虽然都是常数，一个不定义次数，一个定义次数为0．

4．次数公式

$$\partial(f(x)+g(x))\leqslant \max(\partial(f(x)),\partial(g(x)))$$

中何时取等号？何时取小于号？

答　当$f(x),g(x)$次数相等且首项系数之和为零时，取小于号，否则取等号．

（二）题型归类

1．比较次数

例1　设$f(x),g(x)$和$h(x)$都是实系数多项式，且

$$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x) \qquad (1)$$

证明：$f(x)=g(x)=h(x)=0$当$f(x),g(x),h(x)$是复数系

数多项式时，结论如何呢？

证 若$f(x)\neq 0$,则$\partial(f^2(x))$为偶数．由(1)式知$g^2(x)+h^2(x)\neq 0$，由假设知$\partial(g^2(x)+h^2(x))$也是偶数．从而$\partial(xg^2(x)+xh^2(x))$为奇数．这与(1)式矛盾．所以$f(x)=0$.再由(1)式及消去律，故

$$g^2(x)+h^2(x)=0 \tag{2}$$

又因$g(x),h(x)$是实系数多项式以及(2)式，可证得$g(x)=h(x)=0$.

当$f(x),g(x),h(x)$是复系数多项式时，结论不一定成立．比如$f(x)=0,g(x)=1,h(x)=i$.(1)式仍成立．但$g(x)\neq 0,h(x)\neq 0$.

2. 比较系数

例2 （1989年湖北省师范院校大学生竞赛题） 设多项式 $g_1(x)=1,g_{i+1}(x)=1-xg_i(x)\quad(i=1,2,\cdots)$

求$F(x)=1+g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_{1989}(x)$的系数和．

解 设$g_k(x)$的系数和为a_k，可以证明：

$$a_k=\begin{cases}1 & \text{当}k\text{为奇数时}\\0 & \text{当}k\text{为偶数时}\end{cases} \tag{1}$$

当$k=1$时，结论成立．当$k=2$时

$$g_2(x)=1-xg_1(x)=1-x,\qquad \therefore\quad a_2=0,$$

结论也成立．

归纳假设结论对k成立．再证$k+1$时，由于

$$g_{k+1}(x)=1-xg_k(x)$$

$$\therefore a_{k+1}=1-a_k.$$

当k为奇数时，$a_k=1$,则$a_{k+1}=0$；当k为偶数时$a_k=0$,则$a_{k+1}=1$.故结论对$k+1$也成立．从而(1)式对一切自然数成立．

设$F(x)$的系数之和为c，则

$$c=1+a_1+a_2+\cdots+a_{1989}$$
$$=996$$

例3 （1975年美国数学竞赛题） 设k是正整数，求一切实系数多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, \tag{1}$$

满足等式

$$f(f(x))=[f(x)]^k \tag{2}$$

解 若$f(x)=0$,显然满足(2)式．当$f(x)\neq 0$时，设$\partial(f(x))=n$,则$\partial(f(f(x)))=n^2$,$\partial[f(x)]^k=nk$.
由条件知$n^2=nk$.则$n=0$或$n=k$.

1) 当$n=0$时,则$f(x)=a_0$,$a_0=a_0^k$.再讨论k.当$k=1$时，则$f(x)=a_0$可以为任意实数.

当$k>1$时，$a_0=0$或1,即$f(x)=0$或$f(x)=1$.

2) 当$n=k$时，即有$a_k\neq 0$,且

$$f(f(x))=a_k(a_kx^k+\cdots a_1x+a_0)^k+a_{k-1}(a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0)^{k-1}$$
$$+\cdots+a_1(a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0)+a_0 \tag{3}$$
$$[f(x)]^k=(a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0)^k, \tag{4}$$

由(2),(3),(4),并比较首项系数得

$$a_k^{k+1}=a_k^k, \qquad \therefore \quad a_k=1 \tag{5}$$

由(2),(3),(4),(5)得

$$a_{k-1}(a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0)^{k-1}+\cdots+a_1(a_kx^k+\cdots a_0)+a_0=0$$
$$\therefore \quad a_{k-1}=a_{k-2}=\cdots=a_1=a_0=0.$$

这样$f(x)=x^k$.

§2 整除与分解唯一性定理

（一） 内容提要

1. **带余除法．** 设$f(x),g(x)\in P[x]$,且$g(x)\neq 0$.

则存在唯一的一对多项式$q(x), r(x)\in P[x]$,使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),$$

其中$r(x)=0$或$\partial(r(x))<\partial(g(x))$.

2. 设$f(x), g(x)\in P[x]$,且存在$h(x)\in P[x]$,使得$f(x)=g(x)h(x)$成立，则称$g(x)$整除$f(x)$，也称$g(x)$是$f(x)$的一个因式,或$f(x)$是$g(x)$的一个倍式.

3. 整除有以下性质：

(1) 任一多项式都可整除零多项式；

(2) 零多项式只能整除零多项式；

(3) 零次多项式可以整除任一多项式；

(4) 零次多项式只能被零次多项式整除；

(5) 任一多项式可整除本身．且

$$af(x)\mid bf(x)\qquad (其中a\neq 0)$$

对一切$f(x), b, a$成立；

(6) 两多项式互相整除的充要条件是它们仅相差一个非零常数倍；

(7) 仅相差非零常数倍的两多项式，具有相同的因式和倍式；

(8) 整除具有传递性；

(9) 一多项式如果同时整除几个多项式，则必整除它们的任一组合．

3. 不可约多项式．数域$f(x)\in P[x], \partial(f(x))\geqslant 1$如果$f(x)$只有两种因式：非零常数$c$和$cf(x)$,则称$f(x)$在$P$上不可约．否则称为可约.

常数d既不是可约多项式，也不是不可约多项式.

4. 因式分解唯一性定理．数域P上每个次数$\geqslant 1$的多项式，都可分解成P上有限个不可约多项式之积，且除了因式

排列次序和允许相差非零常数倍外，结果是唯一的.

5. 三个特殊数域的多项式分解. 在复数域中，任一n ($n\geqslant 1$)次多项式都可唯一分解成n个一次因式之积（或者说：复数域上只有一次多项式不可约）.

在实数域中，任一n($n\geqslant 1$)次多项式都可唯一分解为一次因式和含复根的二次因式之积（或者说：实数域中不可约因式只能是一次式和含复根的二次式两种）.

在有理数域中，存在含任意高次的不可约多项式.

（二） 答疑辅导

1. 在整除定义中应注意什么？

答 要注意以下几点：

(1) 整除的定义与数域扩大（或缩小）无关.

(2) $g(x)$，$f(x)\in P[x]$则$g(x)|f(x)\Longleftrightarrow$存在$h(x)\in P[x]$，使得

$$f(x)=g(x)h(x)$$

称$h(x)$为商式. 当$g(x)\neq 0$时，商式是唯一的. 但$g(x)=0$时，$f(x)=0$，商式$h(x)$不唯一.

(3) 由等式$x=x^2\cdot\frac{1}{x}$，不能认为x^2可以整除x，因为$\frac{1}{x}$不是多项式.

(4) 我们这里说的是多项式整除，中学里还有整数整除. 这是两个不同的概念. 比如在多项式范围内2可以整除1，但在整数范围内，2不能整除1.

2. 不可约多项式与数域扩大（或缩小）有无关系？

答 有关. 比如x^2+1在实数范围内不可约，但在复数范围内它是可约多项式.

3. $p(x)$是数域P中不可约多项式，$h(x)|p(x)$，那么$h(x)$有几种可能？

答 $h(x)=c\in P$ 或 $h(x)=cp(x)$ 两种类型．但 $p(x)$ 仍有无穷多个因式．

4．有理系数多项式有无一般分解方法？

答 有．即有下面定理

定理（Kronecker） 任意 $n(\geqslant 1)$ 次有理系数多项式 $f(x)$ 可经有限步分解成不可约因式的乘积．

我们对 n 作数学归纳法．

$n=1$ 时，$f(x)$ 已经是不可约，定理成立．

归纳假设定理对 $k(<n)$ 次多项式成立．不失一般性可设 $f(x)$ 是整系数多项式．则 $f(x)$ 有次数 $\leqslant \frac{n}{2}$ 的整系数多项式的因式．令

$$m=\begin{cases} \dfrac{n}{2} & (n\text{ 为偶数}) \\ \dfrac{n-1}{2} & (n\text{ 为奇数}) \end{cases}$$

设 $g(x)$ 是次数 $\leqslant m$ 的整系数多项式，任取 $m+1$ 个互异整数 $a_i(i=0,1,\cdots,m)$，如果 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式，那么 $g(a_i)$ 是 $f(a_i)$ 的因数．对于每个 $f(a_i)$，取定一个因数 b_i，然后用拉格朗日插值公式求一多项式 $g(x)$，使 $g(a_i)=b_i$．这样的 $g(x)$ 只有有限个（最多为 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 可以取值的组数）．

若 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的次数小于等于 m 的整系数多项式的因式，则 $\varphi(x)$ 必是上面求出的 $g(x)$ 中的一个．

用 $g(x)$ 试除 $f(x)$．如果没有一个次数 $\geqslant 1$ 的 $g(x)$ 整除 $f(x)$，则 $f(x)$ 不可约．如果有某个次数 $\geqslant 1$ 的 $g(x)$ 整除 $f(x)$，则 $f(x)=g(x)h(x)$．由归纳假设 $g(x)$，$h(x)$ 都可经有限步分解成不可约因式之积．从而 $f(x)$ 也可经有限步完成．定理证毕．

我们要指出的是：实(复)系数多项式无一般分解方法.

（三）题型归类

1．整除的判定

(1) 用性质

例 1 设 $g(x)|f_1(x)+f_2(x)$, $g(x)|f_1(x)-f_2(x)$. 证明：

$$g(x)|f_1(x),\quad g(x)|f_2(x) \tag{1}$$

证 由假设知

$g(x)$可以整除$[f_1(x)+f_2(x)]\pm[f_1(x)-f_2(x)]$，从而得证(1)式.

(2) 用定义

例 2 设 $g_1(x)g_2(x)|f_1(x)f_2(x)$，$f_1(x)|g_1(x)$, $f_1(x)\neq 0$. 证明 $g_2(x)|f_2(x)$.

证 存在 $g(x)$，使得 $g_1(x)=f_1(x)g(x)$, 又存在 $t(x)$, 使得

$$\begin{aligned} f_1(x)f_2(x) &= g_1(x)g_2(x)t(x) \\ &= f_1(x)g(x)g_2(x)t(x) \end{aligned}$$

消去 $f_1(x)$得

$$f_2(x)=g_2(x)g(x)t(x) \qquad \therefore \quad g_2(x)|f_2(x)$$

(3) 用带余除法

例 3 （辽宁大学研究生入学试题）证明 $x^d-1|x^n-1$ 的充要条件是 $d|n$.

证 先证必要性. 由带余除法知

$$x^n-1=(x^d-1)(x^{n-d}+x^{n-2d}+\cdots+x^{n-qd})+(x^{n-qd}-1)$$

其中$0\leqslant n-qd<d$. 但$x^d-1|x^n-1$, 故$x^{n-qd}-1=0$.

所以 $n=qd$，即 $d|n$.

再证充分性. 设 $d|n$，则存在整数 t，使 $n=dt$，故

$$x^n-1=(x^q-1)(x^{q(q-1)}+x^{q(q-2)}+\cdots+x^q+1)$$

$\therefore$ $$x^q-1\mid x^n-1.$$

(4) 用根判定

例 4 （西南交大研究生入学试题） 设 $f(x)$，$g(x)$ 是两多项式，且 $f(x^3)+xg(x^3)$ 可被 x^2+x+1 整除，则 $f(1)=g(1)=0$.

证 设 x^2+x+1 的两个复根为 α 和 β，则 $\alpha^3=\beta^3=1$. 将 α，β 分别代入 $f(x^3)+xg(x^3)$，那么

$$f(1)+\alpha g(1)=0$$

$$f(1)+\beta g(1)=0$$

解得 $f(1)=g(1)=0$.

(5) 用待定系数法

例 5 设 a，b 是两个不相等的数，证明多项式 $f(x)$ 能被 $(x-a)(x-b)$ 整除的充要条件是 $f(a)=f(b)=0$.

证 先证必要性．设

$$f(x)=(x-a)(x-b)q(x)+(Ax+B) \qquad (1)$$

将 a，b 代入(1)式得

$$Aa+B=0,\ Ab+B=0$$

解得 $A=B=0$．再由(1)式和 $(x-a)(x-b)$ 整除 $f(x)$．

再证充分性．由假设知

$$x-a\mid f(x),\quad x-b\mid f(x)$$

而 $(x-a,\ x-b)=1$，所以 $(x-a)(x-b)$ 整除 $f(x)$．

(6) 用数学归纳法

例 6 证明：

$$(x-1)^3\mid x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^n-1.$$

证 当 $n=1$ 时，结论显然成立，归纳假设 $n=k$ 成立，再看 $n=k+1$ 时．

$$x^{2(k+1)+1}-[2(k+1)+1]x^{(k+1)+1}+[2(k+1)+1]x^{k+1}-1$$
$$=x[x^{2k+1}-(2k+1)x^{k+1}+(2k+1)x^{k}-1]$$
$$+(x-1)(x^{k+1}-1)^{2} \qquad (1)$$

由归纳假设知$(x-1)^3$可以整除(1)式右端第一项，$(x-1)^3$显然可整除(1)式第二项，从而$(x-1)^3$可整除(1)式左端，即证结论对$n=k+1$成立.

从而结论对一切自然数成立.

(7) 用反证法

例 7 设$x|f^k(x)$ （k为自然数），则$x|f(x)$.

证 若x不能整除$f(x)$，则

$$f(x)=xq(x)+r,\quad r\neq 0$$

那么

$$f^k(x)=xg(x)+r^k,\quad r^k\neq 0$$

这与$x|f^k(x)$矛盾. 所以$x|f(x)$.

2. 按幂展开

例 8 把$f(x)=x^6+6x^3-2x-1$ 按$g(x)=x^2+x-1$的幂展开.

解 以$g(x)$除$f(x)$，得商$q_1(x)=x^4-x^3+2x^2+3x-1$，余式$r_1(x)=2x-2$.

其次以$g(x)$除$q_1(x)$，得商$q_2(x)=x^2-2x+5$，余式$r_2(x)=-4x+4$. 再以$g(x)$除商式$q_2(x)$，得商式$q_2(x)=1$，余式$r_3(x)=-3x+6$，于是

$$f(x)=g^3(x)-3(x-2)g^2(x)-4(x-1)g(x)+2(x-1).$$

3. 因式分解

(1) 求有理根分解法

例 9 在有理数域上分解

$$f(x)=x^5-6x^3+x^2+5x-1$$

为不可约因式之积.

解 首先，经验算± 1都是$f(x)$的根，则

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x^3-5x+1)$$

(2) Kronecker 分解法

例10 在有理数域上分解$f(x)=x^5-x^4-2x-1$为不可约因式之积.

解 应用克朗涅克定理，$n=5$，$m=\frac{n-1}{2}=2$. 取$a_0=0$，$a_1=1$，$a_2=-1$. 于是$f(a_0)=-1$的因数是± 1；$f(a_1)=-3$的因数是± 1，± 3；$f(a_2)=-1$的因数是± 1. 这时b_0可取值为2个(± 1)，b_1可取值4个(± 1，± 3)，b^2可取值也是2个(± 1). 从而满足条件$g(a_i)=b_i(i=0,1,2)$的$g(x)$最多只有$2\cdot 4\cdot 2=16$个.

取$b_0=1$，$b_1=-1$，$b_2=-1$，用拉格朗日插值公式求一多项式$g_1(x)=-2x^2+1$，经试除$g_1(x)$不是$f(x)$的因式.

再取$b_0=-1$，$b_1=1$，$b_2=-1$，求多项式$g_2(x)=x^2+x+1$，也不是$f(x)$的因式.

再取$b_0=-1$，$b_1=-1$，$b_2=1$. 求多项式$g_3(x)=x^2-x-1$经试除$g_3(x)|f(x)$，则

$$f(x)=(x^2-x-1)(x^3+x+1).$$

§3 最大公因式

(一) 内容提要

1. 数域P上任意两个不全为零的多项式$f(x)$和$g(x)$，都存在无穷多个最大公因式. 在允许相差非零常数因子外，它们的最大公因式是唯一的，并记$(f(x),g(x))$，为首项系数为1的最大公因式.

$(f(x),g(x))$可用辗转相除法得到.

2. 设 $d(x)=(f(x),g(x))$, 则存在 $u(x)$ 和 $v(x)$, 使得

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x) \qquad (1)$$

这样的 $u(x)$, $v(x)$都不是唯一的.

反之,若首项系数为1的$d(x)$满足(1)式,且 $d(x)\mid f(x)$, $d(x)\mid g(x)$,则有 $d(x)=(f(x),g(x))$.

3. $f_1(x)=af(x)+bg(x)$, $g_1(x)=cf(x)+dg(x)$, 当 $ad-bc\neq 0$ 时, 则$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x))$.

4. 多项式互质有以下性质

(1) $(f(x),g(x))=1 \Longleftrightarrow$ 存在 $u(x)$, $v(x)$, 满足

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

(2) $(f(x),h(x))=1$, $(f(x),g(x))=1$

$\Longleftrightarrow (f(x),g(x)h(x))=1$.

(3) $h(x)\mid f(x)g(x)$, $(h(x),f(x))=1 \Longrightarrow h(x)\mid g(x)$

(4) $g(x)\mid f(x)$, $h(x)\mid f(x)$, $(g(x),h(x))=1$

$\Longrightarrow g(x)h(x)\mid f(x)$.

(5) (复旦大学研究生入学试题) $(f_1(x)\cdots f_m(x),$
$g_1(x)\cdots g_n(x))=1 \Longleftrightarrow (f_i(x),g_j(x))=1$
$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$

(6) $(f(x)h(x),g(x)h(x))=h(x)(f(x),g(x))$, 其中 $h(x)$首项系数为 1.

(二) 答疑辅导

1. 求最大公因式除了辗转相除法外, 还有没有其它方法?

答 还有因式分解法. 设

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),$$

$$g(x)=bp_1^{t_1}(x)p_2^{t_2}(x)\cdots p_s^{t_s}(x),$$

则

$$(f(x),g(x))=p_1^{m_1}(x)\cdots p_s^{m_s}(x).$$

其中 $p_i(x)$ 是首项系数为 1 的多项式，且

$$m_i=\min(k_i,t_i)\qquad(i=1,2,\cdots,s)$$

2. 在最大公因式存在性证明中的关键是什么？

答 关键是下述命题成立：

命题 设 $f(x)=g(x)h(x)+r(x)$，则

$$(f(x),g(x))=(g(x),r(x)).$$

令 $d(x)=(f(x),g(x))$. 因 $d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$，由假设等式可证 $d(x)|r(x)$. 从而 $d(x)$ 是 $r(x)$ 和 $g(x)$ 的一个公因式.

任取 $\varphi(x)$ 为 $g(x)$ 和 $r(x)$ 的公因式，则可证 $\varphi(x)|f(x)$，从而 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式. 但 $d(x)$ 是它们的最大公因式，所以 $\varphi(x)|d(x)$. 由最大公因式定义得证 $d(x)=(g(x),r(x))$. 从而等式成立.

有了上述命题，不难得出最大公因式的存在性证明.

3. 求最大公因式时，为了避免分数计算，可对被除式或余式（包括中间过程）乘以适当非零数，那么这会不会影响结果呢？

答 不影响. 事实上，设

$$f(x)=q(x)g(x)+s(x)\qquad(1)$$

其中 $s(x)$ 不一定是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得余式，而且可能 $\partial(s(x))\geqslant\partial(g(x))$. 换句话说，可能是辗转相除法的某一个中间过程. 则

以非零常数 c 乘被除式 $f(x)$，由(1)式知

$$cf(x)=g(x)(cq(x))+cs(x)\qquad(2)$$

由(2)式及上面一个答疑辅导知

$$(f(x),g(x))=(cf(x),g(x))=(g(x),cs(x)). \quad (3)$$

(3)式说明，当被除式乘非零常数后，不会改变最大公因式。

以非零常数 c 乘 $g(x)$，则

$$f(x)=(cg(x))(c^{-1}g(x))+s(x)$$

则

$$(f(x),g(x))=(f(x),cg(x))=(cg(x),s(x)).$$

也不影响结果.

以非零常数乘$s(x)$，仍有(2)式，从而也不影响结果.

4. 若 $f_1(x),\cdots,f_m(x)$ $(m\geqslant 3)$互素，是否其中任意两个多项式互素呢？

答 不一定，比如

$f_1(x)=x(x-1)$，$f_2(x)=x(x+1)$，$f_3(x)=(x-1)(x+1)$.
它们是互素的．但其中任意两个都不互素.

（三）题型归类

1．求最大公因式

(1) 辗转相除法

例 1 决定 a,b 的值，使

$$f(x)=x^3+(a+1)x^2+2x+2b$$
$$g(x)=x^3+ax^2+b$$

的最大公因式是一个二次多项式，并求出$((f(x),g(x))$.

解 作辗转相除法

$x^3+(a+1)x^2+2x+2b$	x^3+ax^2+b
$x^3+ax^2+\qquad b$	x^3+2x^2+bx
x^2+2x+b	$(a-2)x^2-bx+b$
	$(a-2)x^2+2(a-2)+b(a-2)$
	$(4-2a-b)x+b(3-a)$

要使最大公因式为二次式，则必须

$$\begin{cases}4-2a-b=0\\ 6(3-a)=0\end{cases}$$

解得

$$a=2,\ b=0 \quad 或 \quad a=3,\ b=-2$$

当 $a=2, b=0$ 时，$(f(x), g(x))=x^2+2x$.

当 $a=3, b=-2$时，$(f(x), g(x))=x^2+2x-2$.

(2) 标准分解式法

例 2 设

$f(x)=x^7-x^6-6x^5+2x^4+13x^3+3x^2-8x-4$,

$g(x)=-2x^7-6x^6+20x^4+30x^3+18x^2+4x$.

求$(f(x), g(x))$.

解 $f(x)=(x-1)(x+1)^4(x-2)^2$,

$g(x)=-2x(x+1)^5(x-2)$.

由标准分解式知

$$(f(x), g(x))=(x+1)^4(x-2).$$

2．最大公因式的证明

(1) 用定义证

例 3 设 k 是正整数，证明：当 $f(0)\neq 0$ 时，有

$$(f(x), g(x))=(f(x), x^k g(x)),$$

证 令 $d(x)=(f(x), g(x))$. 显然$d(x)$是$f(x)$与$x^k g(x)$的公因式. 其中若 $b(x)$是 $f(x)$与 $x^k g(x)$的任一公因式，因为 $f(0)\neq 0$, 因而 $b(0)\neq 0$, $b(x)$与 x^k 互素. 但 $b(x)\mid x^k g(x)$. 所以 $b(x)\mid g(x)$. 从而 $b(x)\mid d(x)$, 这样证得

$$d(x)=(f(x), x^k g(x)).$$

(2) 用性质证

例 4 （四川师大研究生入学试题）$f(x), g(x)$ 不全为

0，则

$$(f,g)^n=(f^n,g^n)，\quad (n\text{为正整数})$$

证 令 $d(x)=(f(x),g(x))$ 则

$$f(x)=d(x)f_1(x),g(x)=d(x)g_1(x),(f_1(x),g_1(x))=1$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad (f^n,g^n)&=(d^nf_1^n,\ d^ng_1^n)\\&=d^n(f_1^n,g_1^n)=d^n\\&=(f,g)^n.\end{aligned}$$

3. 证明互素

例 5 设$(f(x),g(x))=1$，m为自然数.证明：

1) $(f(x)+g(x),f(x)-g(x))=1$；

2) $(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$；

3) $(f(x^m),g(x^m))=1$；

4) $(f^m(x),g^m(x))=1$.

证 1) 由本节内容提要3即证

$$(f(x)+g(x),f(x)-g(x))=(f(x),g(x))=1.$$

2) 存在$u,(x)v(x)$使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1. \tag{1}$$

则

$$(u-v)f+v(f+g)=1，\text{和}(v-u)g+u(f+g)=1.$$

两式相乘得

$$-(u-v)^2fg+h(f+g)=1 \tag{2}$$

其中 $h=(u-v)fu+(v-u)gv+(f+g)uv$，由(2)式即证2).

3) 在等式(1)中，将x换成x^m，则

$$u(x^m)f(x^m)+v(x^m)g(x^m)=1.$$

则证3).

4) 由本节内容提要4中(5)即证4).

例 6 证明：两非零多项式$f(x),g(x)$不互素的充要条

件是存在两多项式 $u(x), v(x)$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=0, \tag{1}$$

其中 $0<\partial u(x)<\partial g(x)$，$0<\partial v(x)<\partial f(x)$.

证 充分性. 用反证法，若 $g(x), f(x)$ 互素，由(1)式知 $g(x)\mid u(x)f(x)$，从而 $g(x)\mid u(x)$，这与 $\partial u(x)<\partial g(x)$ 矛盾. 即证 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不互素.

必要性. 设 $d(x)=(f(x),g(x))\neq 0$，令

$$f(x)=d(x)f_1(x),\quad g(x)=d(x)g_1(x)$$

$$\therefore\quad g_1(x)f(x)-f_1(x)g(x)=0$$

其中 $0<\partial g_1<\partial g$，$0<\partial(-f_1(x))<\partial f(x)$.

§4 根与重根

(一) 内容提要

1. 重因式

(1) 若 $p(x)$ 不可约，$p^k(x)\mid f(x)$，$p^{k+1}(x)$ 不能整除 $f(x)$. 则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式.

(2) 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(>1)$ 重因式 $\Longleftrightarrow$ $p(x)$ 是 $(f(x),f'(x))$ 的 $k-1$ 重因式.

(3) $f(x)$ 无重因式 $\Longleftrightarrow (f(x),f'(x))=1$.

(4) 多项式 $f(x)/(f(x),f'(x))$ 必无重因式，且和 $f(x)$ 含有全部相同的不可约因式.

2. 根

(1) $f(x)\in P[x], c\in P$，使 $f(c)=0$，则 c 称为 $f(x)$ 的根或零点.

(2) $x-c$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 $\Longleftrightarrow c$ 为 $f(x)$ 的 k 重根.

3. 根的个数

(1) 数域 P 上 $n(>0)$ 次多项式在 P 内至多有 n 个根.

(2) 复数域上 $n(>0)$ 次多项式一定有 n 个根。

(3) 实数域上奇数多项式在实数域上有奇数个实根（从而至少有一个实根），并且其复根成对。

(4) 有理系数多项式 $f(x)$ 有根 $a+b\sqrt{c}$（其中 a,b，为有理数，$\sqrt{c}$ 是无理数）则 $a-b\sqrt{c}$ 也是 $f(x)$ 的根.

4. 有理根求法步骤是：

(1) 化有理系数多项式为整系数多项式.

(2) 整系数多项式确定一切可能的有理根范围.

(3) 用综合除法判定是不是根.

5. 根与系数关系（韦达公式）

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为多项式

$$f(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

的 n 个根，则

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_n=(-1)\frac{b_{n-1}}{b_n},$$

$$\sum\alpha_i\alpha_j=\frac{b_{n-2}}{b_n},$$

$$\sum\alpha_i\alpha_j\alpha_k=(-1)^3\frac{b_{n-3}}{b_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\frac{b_0}{b_n}.$$

（二）答疑辅导

1. 一次和二次多项式均有求根公式，高次呢？

答 三次多项式或3次方程求根公式在1545年由意大利数学家塔尔塔利亚（N.Tartaglia）和卡当（H.Cardano）给出.

设 $f(x)=x^3+px+q$ 的三个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令

$$\Delta=\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3},\quad w=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\ (\text{即 } w^3=1)$$

则

$$\begin{cases} \alpha_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\Delta}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\Delta}, \\ \alpha_2=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\Delta}\,w+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\Delta}\,w^2, \\ \alpha_3=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\Delta}\,w^2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\Delta}\,w. \end{cases} \quad (1)$$

一般三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0\quad(a\neq0)$，只要令 $y=x+\frac{b}{3a}$则可化为

$$y^3+py+q=0$$

其中 $p=(2ac-b^2)/3a^2$，$q=(2b^3-9abc+27a^2d/27a^3$.
再用(1)式可求根.

四次多项式（或 4 次方程）求根公式，由卡当的学生意大利数学家费粒利（L.Ferrari）给出．设 4 次方程

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0.$$

配方后得

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d.$$

两边加 $\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)t+\frac{t^2}{4}$ 得

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{t}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+t\right)x^2+\left(\frac{at}{2}-c\right)x+\left(\frac{t^2}{4}-d\right)(1)$$

适当选 t 使右边二次式的判别式为0，即

$$\left(\frac{at}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+t\right)\left(\frac{t^2}{4}-d\right)=0 \quad (2)$$

这时方程(2)是关于 t 的 3 次方程，可以由卡当公式求解．设 t_0 为(2)的任一根，代入(1)后得

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{t_0}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+t_0}\,x+\sqrt{\frac{t_0^2}{4}-d}\right)^2 \qquad (3)$$

由方程(3)可得两个二次方程：

$$\begin{cases} x^2+\left(\dfrac{a}{2}+\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-b+t_0}\right)x+\left(\dfrac{t_0}{2}+\sqrt{\dfrac{t_0^2}{4}-d}\right)^2=0 \\ x^2+\left(\dfrac{a}{2}-\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-b+t_0}\right)x+\left(\dfrac{t_0}{2}-\sqrt{\dfrac{t_0^2}{4}-d}\right)=0 \end{cases} \qquad (4)$$

解方程(4)，即可得原4次方程的4个根．

5次以上的方程（或多项式），1824年由挪威数学家阿贝尔（Able）首先证明不存在求根公式，1828年法国数学家伽罗华（Galois）彻底解决了这个问题，他不仅证明所有n($\geqslant 5$)次方程都适用的求根公式不存在，而且给出了具有求根公式的n($\geqslant 5$)次方程所应满足的条件，历时200多年终于完成了世界数学大师们关心的求根公式问题．

2．实系数多项式(或方程）实根的个数有无判定方法？

答 有斯图姆（Sturm）定理可以判定多项式$f(x)$在任一区间内(a,b)实根的个数，有兴趣读者可参考[6]．

（三）题型归类

1．重根的判定

(1) 用辗转相除法

例 1 证明多项式$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$有重根$\Longleftrightarrow$

$$\Delta=a^2b^2-4b^3-4a^3c-27c^2+18abc=0$$

证 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，对$f(x)$与$f'(x)$作辗转相除，得余式为Δ，所以$f(x)$有重根的充要条件是$(f(x), f'(x))\neq 1$或$\Delta=0$．

(2) 用结式判定

例2 （清华大学研究生入学试题）$f(x)=x^3+6x^2+3px$

$+8$，试确定 p 的值，使 $f(x)$ 有重根，并求其根.

解 $f'(x)=3x^2+12x+3p$

$$R(f,f')=\begin{vmatrix}1&6&3p&8&0\\0&1&6&3p&8\\3&12&3p&0&0\\0&3&12&3p&0\\0&0&3&12&3p\end{vmatrix}=(p-4)^2(p+5).$$

当 $R(f,f')=0$时，$f(x)$有重根.

当 $p=4$ 时，$f(x)=(x+2)^3$，即有 3 重根为 -2；当 $p=-5$时，$f(x)=(x-1)^2(x+8)$，$f(x)$有二重根1.

(3) 用反证法

例3 （武汉大学研究生入学试题） 问多项式

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}=f(x)$$

有无重根？

答 $f(x)=f'(x)+\dfrac{x^n}{n!}$. 若 α 为 $f(x)$的重根，则 $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$. 从而 $\alpha=0$. 但 0 不是 $f(x)$的根，故 $f(x)$无重根.

2. 重根的求法

例4 问 2 是不是多项式

$$f(x)=x^5-6x^4+11x^3-2x^2-12x+8$$

的根？如果是，是几重根？

答 $f(2)=0$，故 2 是 $f(x)$的根，又

$$(f(x),f'(x))=(x-2)^2,$$

故 2 是 $f(x)$的 3 重根.

3. 根与系数关系

例5 （1978年武汉数学竞赛题） 若 α,β 同为 x^2+px+

$q=0$ 和 $x^{2n}+p^nx^n+p^n=0$（n 为正偶数）的两个相异非零根，求证 $\beta/\alpha, \alpha/\beta$ 为 $x^n+1+(x+1)^n=0$ 的根.

证 因为 $\alpha+\beta=-p$，n 是偶数，故 $(\alpha+\beta)^n=p^n$. 又因为

$$0=\alpha^{2n}+p^n\alpha^n+q^n=(\alpha^n)^2+p^n(\alpha^n)+q^n,$$

故 α^n 是 $x^2+p^nx+q^n=0$ 的根. 同理 β^n 也是它的另一根，故 $\alpha^n+\beta^n=-p^n$，从而 $\alpha^n+\beta^n+(\alpha+\beta)^n=0$.

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n+1+\left(\frac{\beta}{\alpha}+1\right)^n=\frac{\beta^n+\alpha^n+(\alpha+\beta)^n}{\alpha^n}=0,$$

即证 $\frac{\beta}{\alpha}$ 是 $x^n+1+(x+1)^n=0$ 的根. 类似可证 $\frac{\alpha}{\beta}$ 是方程的根.

例6（1983年澳大利亚数学竞赛题） 设 x_1, x_2, x_3 为方程 $x^3-6x^2+ax+a=0$ 的三个根，求出使

$$(x_1-1)^3+(x_2-2)^3+(x_3-3)^3=0$$

的所有实数 a，并对每个这样的 a，求出相应的 x_1, x_2, x_3.

解 令 $y=x-2$，则

$$y^3+(a-12)y+(3a-16)=0. \tag{1}$$

那么 $y_1=x_1-2$，$y_2=x_2-2$，$y_3=x_3-2$ 为（1）的三个根. 故

$$0=y_1+y_2+y_3=(y_1+1)+y_2+(y_3-1) \tag{2}$$

我们已知公式

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz. \tag{3}$$

在（3）式中令 $x=y_1+1$，$y=y_2$，$z=y_3-1$，并注意（2）式，则

$$\begin{aligned}0&=(x_1-1)^3+(x_2-2)^3+(x_3-3)^3\\&=(y_1+1)^3+y_2^3+(y_3-1)^3=3(y_1+1)y_2(y_3-1).\end{aligned}$$

因此 $y_1=-1$ 或 $y_2=0$ 或 $y_3=1$.

当 $y_1=-1$时，$x_1=y_1+2=1$，代入原方程解得$a=\frac{5}{2}$.

则 $x^3-6x^2+ax+a=(x-1)\left(x^2-5x-\frac{5}{2}\right)$

另两根为

$$x_2=\frac{1}{5}(5+\sqrt{35}),\quad x_2=\frac{1}{5}(5-\sqrt{35}).$$

当 $y_2=0$ 时，$x_2=y_2+2=2$，代入原方程 得 $a=\frac{16}{3}$.且另两根为

$$2+\frac{2}{3}\sqrt{15} \text{ 和 } 2-\frac{2}{3}\sqrt{15}.$$

当 $y_3=1$ 时，$x_3=3$，$a=\frac{27}{4}$. 另两根为

$$\frac{3}{2}(1+\sqrt{2}),\quad \frac{3}{2}(1-\sqrt{2}).$$

§5 多元多项式

（一）内容提要

1. 设 P 是数域，$x_1,\cdots,x_n$ 是 n 个文字，称

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}+bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}+\cdots+cx_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}$$

为 n 元多项式，其中 $a,b,\cdots,c\in P$，k_i，l_i，m_i 均为非负整数.

2. n 元多项式常用的有两种排列法，一种是按某一文字的降幂排列法；另一种是按字典排列法．即当 $k_1=l_1,\cdots,k_{i-1}=l_{i-1}$，$k_i>l_i$ 时则 $ax_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$ 排在 $bx_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}$ 的前面.

3. 如果任意对换两个文字 x_i 和 x_j 后，n 元多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)$不变，则 $f(x_1,\cdots,x_n)$是对称多项式.

4. 下列几个多项式称为 n 元初等对称多项式：

$$\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_n = x_1x_2\cdots x_n.$$

5. 每个对称多项式都可唯一表成初等对称多项式的多项式（对称多项式的基本定理）.

（二）答疑辅导

1. n 元多项式按字典排列法写出，首项是不是最高次项？

答　不一定. 比如两个文字 x_1, x_2 的多项式

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$$

是按字典排列的，而最高次项是 x_2^2 并不是首项.

2. 什么叫牛顿公式？

答　$x_1, \cdots, x_n$ 是 n 个文字，$\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 是 n 个文字的初等对称多项式，令 k 方和

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \quad (k \text{ 为自然数})$$

则下面公式称为牛顿公式：

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} - \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0. \tag{1}$$

但当 $k > n$ 时，需把（1）式中 $\sigma_{n+1}, \cdots, \sigma_k$ 看成0.

3. 怎样把 k 方和 s_k 表成 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 的多项式？

答　由基本定理 s_k 可以表成 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 的多项式. 如果用消去首项法或待定系数法来做，计算都很麻烦，但用牛顿公式较为简便. 下面举两个例子.

(1) 设 $n=2$，求 s_5.

先依次令 $k=1,2,3,4,5$ 写出（1）式：

$$s_1 - \sigma_1 = 0,$$

$$s_2 - \sigma_1 s_1 + 2\sigma_2 = 0,$$

$$s_3-\sigma_1 s_2+\sigma_2 s_1-3\sigma_3=0,$$

$$s_4-\sigma_1 s_3+\sigma_2 s_2-\sigma_3 s_1+4\sigma_4=0,$$

$$s_5-\sigma_1 s_4+\sigma_2 s_3-\sigma_3 s_2+\sigma_4 s_1-5\sigma_5=0.$$

因为 $k=5>n=2$，需令 $\sigma_3=\sigma_4=\sigma_5=0$，上面一串式子由上往下逐次代入得

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2.$$

(2) 当 $n=5$ 时，求 s_5. 这时 $n=k=5$，仍由上一串式子，由上往下逐次代入得

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3+5\sigma_5.$$

4. 什么叫做多项式的根的判别式？

答　设一元多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \quad (a_0\neq 0) \qquad (1)$$

的 n 个根为 $x_1,\cdots,x_n$，称

$$\Delta=a_0^{2n-2}\prod_{i>j}(x_i-x_j)^2 \qquad (2)$$

为 $f(x)$ 为根的判别式. 显然，$f(x)$ 有重根的充要条件是 $\Delta=0$.

5. 上述判别式能否用 $f(x)$ 的系数表出？当 $f(x)$ 是 2 次或 3 次时，Δ 等于什么？

答　Δ 能用 $f(x)$ 的系数表出. 因为 Δ 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的对称多项式，故 Δ 可用 $x_1,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 的多项式表出，再由韦达定理，则 Δ 便可由 $f(x)$ 的系数表出. 下面给出计算 Δ 的一个常用公式

$$\Delta=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{-1}R(f,f'), \qquad (1)$$

其中 $R(f,f')$ 为结式.

当 $f(x)=x^2+px+q$ 时，$f'(x)=2x+p$，则

$$\triangle=(-1)^{\frac{2(2-1)}{2}}R(f,f_t)=-\begin{vmatrix}1 & p & q\\ 2 & p & 0\\ 0 & 2 & p\end{vmatrix}=p^2-4q.$$

当 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 时，$f'(x)=3x^2+2ax+b$，则

$$\triangle=(-1)^{\frac{3(3-1)}{2}}R(f,f')=-\begin{vmatrix}1 & a & b & c & 0\\ 0 & 1 & a & b & c\\ 3 & 2a & b & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2a & b & 0\\ 0 & 0 & 3 & 2a & b\end{vmatrix}$$

$$=a^2b^2-4b^3+18abc-27c^2-4a^3c.$$

（三）题型归类

1．把对称多项式表成初等对称多项式的多项式.

(1) 公式法

例1 把对称多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3$$

表成初等对称多项式的多项式.

解 此题由牛顿公式得 ($n=k=3$)

$$s_3=x_1^3+x_2^3+x_3^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$$

$$\therefore\quad f(x_1,x_2,x_3)=s_3-3x_1x_2x_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2.$$

(2) 消去首项法

例2 把对称多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2+(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2+(x_3-x_1)^2(x_1-x_2)^2$$

表成初等对称多项式的多项式.

解 f 的首项为 x_1^4，对应的指数组为(4,0,0)作 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的幂积为

$$\sigma_1^{4-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0=\sigma_1^4.$$

令

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=f(x_1,x_2,x_3)-\sigma_1^4$$
$$=-6\sum x_1^3x_2-3\sum x_1^2x_2^2-12\sum x_1^2x_2x_3$$

首项指数组为(3,1,0)，再作幂积为

$$\sigma_1^{3-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=\sigma_1^2\sigma_2.$$

令

$$f_2(x_1,x_2,x_3)=f_1(x_1,x_2,x_3)-\sigma_1^2\sigma_2$$
$$=9\sum x_1^2x_2^2+18\sum x_1^2x_2x_3.$$

首项指数组为 (2,2,0)，相应幂积为 $9\sigma_2^2$，令

$$f_3(x_1,x_2,x_3)=f_2(x_1,x_2,x_3)-9\sigma_2^2=0$$

$$\therefore\quad f(x_1,x_2,x_3)=\sigma_1^4+f_1(x_1,x_2,x_3)$$
$$=\sigma_1^4-6\sigma_1^2\sigma_2+f_2(x_1,x_2,x_3)$$
$$=\sigma_1^4-6\sigma_1^2\sigma_2+9\sigma_2^2.$$

(3) 待定系数法

例 3 把对称多项式

$$f(x_1,\cdots x_n)=\sum x_1^2x_2+2\sum x_1^2$$

表示成初等对称多项式的多项式

解 $f=f_1+f_2$，其中

$$f_1(x_1,\cdots,x_n)=2\sum x_1^2$$
$$=2[(x_1+\cdots+x_n)^2-2(x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n)]$$
$$=2(\sigma_1^2-2\sigma_2)=2\sigma_1^2-4\sigma_2$$
$$f(x_1\cdots x_n)=\sum x_1^2x_2$$

再用待定系数法把 f_2 表成初等对称多项式的多项式：

可能的指数组	幂　　积
2 1 0 0…0	$\sigma_1\ \sigma_2$
1 1 1 0…0	σ_3

$\therefore \qquad f_2(x_1,\cdots,x_n)=\sigma_1\sigma_2+A\sigma_3 \qquad (1)$

令 $x_1=x_2=x_3=1$，$x_4=\cdots=x_n=0$，由（1）式得

$$6=3.3+A\cdot 1 \qquad \therefore \qquad A=-2$$

$$f_2=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$$

$$f=\sigma_1\sigma_2-2\sigma_3+2\sigma_1^2-4\sigma_2$$

2．对称多项式的应用

(1) 用于解方程组

例 4 解方程组

$$\begin{cases}x+y+z=2\\(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=4\\x^2y^2z+x^2yz^2+xy^2z^2=2\end{cases}$$

解 三个方程左端都是 x,y,z 的对称多项式，则可化为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2\sigma_1^2-6\sigma_2,$$

$$x^2y^2z+x^2yz^2+xy^2z^2=\sigma_2\sigma_3,$$

则原方程组化为

$$\begin{cases}\sigma_1=2\\2\sigma_1^2-6\sigma_2=14\\\sigma_2\sigma_3=2\end{cases}$$

解得 $\sigma_1=2$，$\sigma_2=-1$，$\sigma_3=-2$.故有

$$\begin{cases}x+y+z=2\\xy+yz+zx=-1\\xyz=-2\end{cases}$$

由韦达定理，x，y，z 是下面 3 次方程的 3 个根：

$$t^3-2t^2-t+2=0 \qquad (1)$$

而（1）的三个根为 $1,-1,2$.从而对它们作一切排列，故原方程组有 6 个解：

$(1,-1,2)$，$(1,2,-1)$，$(-1,1,2)$，$(-1,2,1)$，$(2,1,-1)$，$(2,-1,1)$.

(2) 用于分解因式

例 5 将 $(x+y+xy)(y+z+yz)(x+z+xz)+xyz$ 分解因式.

解 将所给式子展开，便知它们是下面 4 个齐次对称多项式之和：

$$x^2y^2z^2=\sigma_3^2,$$

$$2(x^2y^2z+x^2yz^2+xy^2z^2)=2\sigma_2\sigma_3,$$

$$x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+3(x^2yz+xy^2z+xyz^2)$$

$$=\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_3,$$

$$x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+3xyz=\sigma_1\sigma_2$$

则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\sigma_3^2+2\sigma_2\sigma_3+\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_1\sigma_2\\&=(\sigma_2+\sigma_3)(\sigma_3+\sigma_2+\sigma_1)\\&=(xyz+xy+yz+xz)\cdot\\&\cdot(xyz+xy+xz+yz+x+y+z),\end{aligned}$$

(3) 证明恒等式

例 6 设 $xyz\neq0$，$x+y+z=0$，证明

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}=-3.$$

证 左端 $=\dfrac{y^2z+x^2z+yz^2+zy^2+xz^2+zx}{xyz}$

$$=\frac{\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3}{\sigma_3}=-3.$$

3. 多元多项式零点的个数

例 7 （第三届全国大学生数学夏令营试题）设多项式 $f(x,y)$ 关于 x 的次数 $\leqslant n$，关于 y 的次数 $\leqslant m$. 且设存在不

同的数 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 和不同数 $b_j(j=0,1,\cdots m)$，使得

$$f(a_i,b_j)=0,\quad (i=0,1,\cdots,n;\ j=0,1,\cdots,m),\quad (1)$$

试证 $f(x,y)\equiv 0$.

证 设

$$f(x,y)=c_n(y)x^n+c_{n-1}(y)x^{n-1}+\cdots+c_1(y)x+c_0(y),\ (2)$$

其中 $c_k(y)=0$ 或 $\partial(c_k(y))\leqslant m\ (k=0,1,\cdots,n)$.

由假设知

$$0=f(a_i,b_j)=c_n(b_j)a_i^n+\cdots+c_1(b_j)a_i+c_0(b_j)$$
$$(i=0,1,\cdots,n;\ j=0,1,\cdots m)$$

固定 j，把 $c_n(b_j)$，$c_{n-1}(b_j)$，…，$c_0(b_j)$ 看成 $n+1$ 个未知数，对不同 i，共有 $n+1$ 个方程. 由于系数行列式为范德蒙行列式不为 0，故有

$$c_k(b_j)=0\qquad (k=0,1,\cdots,m)\qquad (?)$$

再固定 k，由 j 的任意性，共有 $m+1$ 个不同根.

$$\therefore\qquad c_k(y)\equiv 0\quad (k=0,1,\cdots,m)$$

再代入（2），即证 $f(x,y)\equiv 0$.

§6 综合题

例 1 （河南大学研究生入学试题）设 $f(x)$是多项式，a，b 是任意数，c 是非零数，证明：

(1) $f(x-c)=f(x)\Longleftrightarrow f(x)$是常数；

(2) $f(a+b)=f(a)+f(b)\Longleftrightarrow f(x)=kx$（$k$常数在）；

(3) $f(a+b)=f(b)\Longleftrightarrow f(x)=0$ 或 1.

证 (1)，(2)，(?) 的充分性是显然的，下证必要性，

(1) 如果 $f(x)$ 不是常数，令 $\partial(f(x))=n>0$，并设 α_1，…，α_n 是 $f(x)$ 的 n 个根，由

$\because \quad f(a_i - c) = f(a_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$
知 $a_i - c$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 也是 $f(x)$ 的 n 个根，由韦达定理

$$(a_1 - c) + \cdots + (a_n - c) = a_1 + \cdots + a_n.$$

所以 $-nc=0$，得出 $c=0$，这与假设矛盾. 所以 $f(x)$是常数.

(2) 由假设，取 $b=0$，得 $f(0)=0$，从而 0 是 $f(x)$的根. 令 $f(x)=xg(x)$，从而

$$2xg(2x) = f(2x) = f(x) + f(x) = 2[xg(x)]$$

$$\therefore \qquad g(2x) = g(x)$$

从而得证 $g(x)$ 是一常数 k，$f(x)=kx$.

(3) 由假设知

$$f(2x) = f(x+x) = f(x)f(x).$$

从而 $f(x)$ 必为常数 d，即 $f(x)=d$. 再由

$$f(0) = f(0+0) = f(0)^2 \quad \therefore \quad d = d^2 \quad d = 0 \text{ 或 } 1.$$

从而得证 $f(x)=0$ 或 1.

例 2 (1)（内蒙古大学研究生入学试题）设 m，n 是正整数，求 $(x^n-1,\ x^m-1)$；

(2) 设 m，n 是大于 1 的整数，且

$$f(x) = x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1,$$

$$g(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1.$$

求证 $(f(x),\ g(x)) = 1 \Longleftrightarrow (m, n) = 1.$

证 (1) 令 $d=(m,n)$ 则可证

$$x^d - 1 = (x^n - 1, x^m - 1) \qquad (1)$$

显然 x^d-1 是 x^m-1 和 x^{n-1} 的公因式.

其次 $\varphi(x)$ 是 x^m-1 和 x^n-1 的任一公因式.则由

$$mu + nv = d \quad (u>0,\ v<0)$$

得

$$x^{-nv}(x^d-1)=(x^{mu}-1)-(x^{-nv}-1) \qquad (2)$$

$\varphi(x)$ 可整除 (2) 式右端每一项，从而 $\varphi(x)$ 可整除 $x^{-nv}(x^d-1)$，但 $\varphi(x)$ 不含因子 x.故 $\varphi(x)\mid x^d-1$，即证 (1) 式.

(2)
$$x^n-1=f(x)(x-1)$$
$$x^{m-1}=g(x)(x-1)$$

则

$$(f(x),g(x))=1 \Longleftrightarrow (x^n-1,x^m-1)=x-1$$
$$\Longleftrightarrow (m,\ n)=d=1.$$

例 3 （华中师范大学研究生入学试题）设 a_1，…，a_n 是互异的整数，则多项式

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1 \qquad (1)$$

不能分解成两个次数都大于 0 的整系数多项式的乘积.

证 用反证法，若 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $g(x)$和$h(x)$ 是次数大于 0 的整系数多项式. 则

$$g(a_i)h(a_i)=f(a_i)=-1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

因 $g(a_i)$，$h(a_i)$ 都是整数，故 $g(a_i)=1$，$h(a_i)=-1$ 或 $g(a_i)=-1$，$h(a_i)=1$,即

$$g(a_i)+h(a_i)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

又因 $\partial[g(x)+h(x)]<n$,所以 $g(x)+h(x)=0$，从而

$$f(x)=g(x)h(x)=-g^2(x)$$

$-g^2(x)$的首项系数为负数，这与 $f(x)$ 的首项系数为 1 矛盾. 即证结论.

例 4 设 $f(x)$ 是整系数多项式,证明：如果存在一个偶数 a 及一个奇数 b，使 $f(a)$ 与 $f(b)$ 都是奇数，则$f(x)$ 无整数根，由此得：

(1) 当 $f(m)$ 和 $f(m+1)$ 都是奇数时，$f(x)$ 无整数根

(m 是整数)；

(2)(苏联大学生数学竞赛题)当 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数时，$f(x)$ 无整数根.

证 设 $f(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n$，因 a 是偶数，

$$f(a)=c_0a^n+\cdots+c_{n-1}a+c_n$$

$f(a)$是奇数，故c_n是奇数.从而对任何偶数 d，$f(d)$ 都是奇数.又因 b 是奇数，而

$$f(b)=c_0b^n+\cdots+c_{n-1}b+c_n$$

也是奇数，故对奇数 d，由

$$b^i-d^i \quad (i=n,\ n-1,\ \cdots,\ 1)$$

是偶数，知

$$f(b)-f(d)=c_0(b^n-d^n)+\cdots+c_{n-1}(b-d)$$

必为偶数，从而 $f(d)$ 为奇数.

综上所述，对任何整数 k，$f(k)$ 均为奇数，即证 $f(x)$ 没有整数根.

例 5 (同济大学研究生入学试题)设对于 x 的一切实数值，实系数多项式 $f(x)$ 的值都$\geqslant 0$，则

$$f(x)=\varphi_1^2(x)+\varphi_2^2(x), \qquad (1)$$

其中 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 是实系数多项式.

证 设 $a_1<a_2<\cdots<a_r$ 分别是 $f(x)$ 的 k_1，k_2，$\cdots$，k_r 重实根，则

$$f(x)=(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_r)^{k_r}g(x), \qquad (2)$$

其中 $g(x)$无实根.

下证 $k_1,\cdots k_r$ 均为偶数．若某 k_t 是奇数，取 $c\in(a_{t-1},a_t)$，$d\in(a_t,a_{t+1})$．因$(c-a_t)^{k_t}$，$(d-a_t)^{k_t}$ 反号．而当 $j\neq t$ 时，所有其余$(c-a_j)^{k_j}$与$(d-a_j)^{k_j}$同号，故 $f(c)$与$(f(d)$反号．这与 $f(x)$的一切值$\geqslant 0$ 矛盾．从而 $k_1,\cdots,k_r$ 均为偶

数．设

$$k_i=2s_i\ (i=1,2,\cdots,r).$$

$$\therefore\qquad f(x)=f_1^2(x)g(x),\tag{3}$$

其中 $f(x)=(x-\alpha_1)^{s_1}\cdots(x-\alpha_r)^{s_r}$．再设

$$\begin{aligned}g(x)&=(x-\alpha_1)(x-\bar{\alpha}_1)\cdots(x-\alpha_m)(x-\bar{\alpha}_m)\\&=[(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m)][(x-\bar{\alpha}_1)\cdots(x-\bar{\alpha}_m)]\\&=[h_1(x)+ih_2(x)][h_1(x)-ih_2(x)]\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad g(x)=h_1^2(x)+h_2^2(x).\tag{4}$$

其中 $\bar{\alpha}_i$ 是 α_i 的共轭复数，$h_1(x)$，$h_2(x)$ 是实系数多项式．

将(4)式代入(3)式，则

$$f(x)=\varphi_1^2(x)+\varphi_2^2(x),$$

其中 $\varphi_1(x)=f_1(x)h_1(x)$，$\varphi_2(x)=f_1(x)h_2(x)$．

例 6 （南开大学研究生入学试题） 设 $f(x)$是有理数域上 $n(\geqslant 2)$次多项式，并且在有理数域上不可约．但知 $f(x)$一根的倒数也是 $f(x)$的根．证明：$f(x)$每一根的倒数是 $f(x)$的根．

证 不失一般可设

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.\tag{1}$$

由假设知存在一数 α 使

$$f(\alpha)=f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0.\tag{2}$$

令

$$M=\{\varphi(x)\mid\varphi(\alpha)=0,\ \varphi(x)\text{是有理数多项式}\}.\tag{3}$$

下证 $f(x)$是 M 中次数最低的，从而是唯一的．

设 M 中次数最低的首项系数为 1 的多项式为 $h(x)$，则 $h(\alpha)=0$．用 $h(x)$除 $f(x)$，则

$$f(x)=q(x)h(x)+r(x)\tag{4}$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\partial r(x)<\partial h(x)$．由于 $r(\alpha)=0$，以及 $h(x)$ 次数最低，所以 $r(x)=0$．则 $h(x)|f(x)$，由于 $f(x)$ 不可约，故 $q(x)$ 一定是常数．但 $h(x)$，$f(n)$ 首项系数都是 1．得证 $f(x)=h(x)$．

再证(1)式中 a_i 有

$$a_0=\pm 1 \quad a_i=\pm a_{n-i} \ (i=1,2,\cdots,n-1). \tag{5}$$

因为

$$f(\alpha)=\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+\alpha_0=0, \tag{6}$$

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{1}{\alpha}\right)+a_0=0. \tag{7}$$

由(7)式得

$$\alpha^n+\frac{a_1}{a_0}\alpha^{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\alpha+\frac{1}{a_0}=0. \tag{8}$$

由(6)，(8)两式及上面证明的唯一性

$$\therefore \qquad a_0=\frac{1}{a_0},\ a_0=\pm 1$$

$$a_i=\frac{a_{n-i}}{a_0} \quad \therefore \quad a_i=\pm a_{n-i}.$$

最后，设 β 为 $f(x)$ 的任一根，则

$$0=f(\beta)=\beta^n+a_{n-1}\beta^{n-1}+\cdots+a_1\beta+a_0$$

$$\text{当 } a_0=1 \text{ 时} \quad \beta^n+a_{n-1}\beta^{n-1}+\cdots+a_1\beta+1=0 \tag{9}$$

(9)式两边同乘 $\frac{1}{\beta^n}$ 得 $f\left(\frac{1}{\beta}\right)=0$．

当 $a_0=-1$ 时，

$0=\beta^n+a_{n-1}\beta^{n-1}+\cdots+a_1\beta^{-1}$ 两边同乘 $\frac{1}{\beta^n}$，也可证 $f\left(\frac{1}{\beta}\right)=0$．

例 7　（1989年湖北省师范专业大学生数学竞赛试题）

数域 F 上 $2n$ 个次数不大于 $n-1$ 的多项式

$$f_i(x)=a_{i1}+a_{i2}x+\cdots+a_{in}x^{n-1}$$

$$(i=1,2,\cdots n)$$

$$g_i(x)=b_{i1}+b_{i2}x+\cdots+b_{in}x^{n-1}$$

设 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$都是 n 阶可逆阵。证明：存在多项式组$\{f_i\}$到$\{g_i\}$的一个满射 σ，使 F 上任一 $n-1$ 次多项式，都可写成

$$\sigma(f_1(x)),\cdots,\sigma(f_r(x)),\ f_{r+1}(x),\cdots,f_n(x)$$

$$(r=1,2,\cdots,n)$$

的线性组合。

证 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 分别为 A 和 B 的列向量组．令 $F^{n\times1}$ 为数域 F 上一切 n 维列向量所成线性空间，由假设可知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 $F^{n\times1}$ 的两组基．

固定自然数 r，考虑向量组

$$\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n,\ \beta_1,\cdots,\beta_n \tag{1}$$

则(1)的秩为 n．从 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 出发可添加 $\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_r}$，使向量组

$$\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_r},\ \alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n \tag{2}$$

为(1)的一个极大线性无关组，也为 $F^{n\times1}$ 的一组基．

将 $f_i(x)$和 $g_i(x)$写成坐标形式为：

$$\left.\begin{aligned}f_i(x)&=(1,x,\cdots,x^{n-1})\alpha_i,\\ g_i(x)&=(1,x,\cdots,x^{n-1})\beta_i.\end{aligned}\right.\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

则将 $g_1,\cdots,g_n$ 重新排列，并将 $g_{i_1},\cdots,g_{i_r}$ 排在前面得

$$g_{i_1},\cdots,g_{i_r},\ g_{j_1},\cdots,g_{j_{n-r}} \tag{3}$$

令 $f_1,\cdots,f_n$ 与(3)按次序作一一映射，记为 σ，则 σ 为$\{f_i\}$到$\{g_i\}$的一个满射．

对 F 上任一个 $n-1$ 次多项式

$$h(x)=c_1+c_2x+\cdots+c_nx^{n-1}$$
$$=(1,x\cdots,x^{n-1})\gamma$$

其中

$$\gamma=(c_1,\cdots,c_n)'\in F^{n\times 1}$$

则 γ 可由(2)线性表出

$$\gamma=k_1\beta_{i_1}+\cdots+k_r\beta_{i_r}+k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+k_n\beta_n$$

故

$$h(x)=(1,x,\cdots,x^{n-1})\gamma$$
$$=(1,x,\cdots,{}^{n-1})(k_1\beta_{i_1}+\cdots+k_r\beta_{i_r}$$
$$+k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+k_n\alpha_n)$$
$$=k_1g_{i_1}+\cdots+k_rg_{i_r}+k_{r+1}f_{r+1}+\cdots+k_nf_n$$
$$=k_1\sigma(f_1)+\cdots+k_r\sigma(f_r)+k_{r+1}f_{r+1}+\cdots+k_nf_n.$$

例 8 (美国大学生数学竞赛题) 求三次方程，使其三个根分别是三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根的立方.

解 设 α,β,γ 为 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根.

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$$
$$+3\alpha\beta\gamma=-a^3-3ab+3c,$$
$$\alpha^3\beta^3+\alpha^3\gamma^3+\beta^3\gamma^3=(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)^3$$
$$-3\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$$
$$+3\alpha^2\beta^2\gamma^2=b^3-3abc+3c^2,$$
$$\alpha^3\beta^3\gamma^3=-c^3.$$

由韦达定理，以 $\alpha^3,\beta^3,\gamma^3$ 为根的方程为

$$y^3+(a^3-3ab+3c)y^2+(b^3-3abc+3c^2)y+c^3=0.$$

第五章　线 性 空 间

§1　线性空间的定义与性质

（一）内容提要

1．设 P 是一个数域，V 是一个非空集合．如果在 V 中中定义了一个加法，在 P 与 V 的元素之间定义了一个数量乘法，并且加法和数量乘法适合下列几个条件，那么就称 V 是 P 上的一个线性空间（或称向量空间）．

（1）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

（2）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

（3）V 中有一个元素 0，$\forall\alpha\in V$，$\alpha+0=\alpha$．

（4）$\forall\alpha\in V$，存在 $\beta\in V$，使 $\alpha+\beta=0$．

（5）$1\alpha=\alpha$

（6）$k(l\alpha)=(kl)\alpha$

（7）$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

（8）$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

其中 $1,k,l\in P$；$\alpha,\beta,\gamma\in V$．

2．线性空间的简单性质．

（1）零元素是唯一的．

（2）负元素是唯一的．

（3）$k\alpha=0\Longleftrightarrow k=0$ 或 $\alpha=0$．

（二）答疑辅导

1．如果 P，V 固定，是否只有唯一的一种方法定义线

性空间？

答　不一定．比如 $V=\{(a,b)|a,b\in R\}$ 其中 R 为实数域．

V 关于通常的矩阵加法与数乘，构成 R 上的线性空间．其次，V 按下面定义的运算：

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d+ac),$$

$$k(a,b)=\left(ka,\ kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right).$$

也是 R 上的线性空间．

尽管集合完全一样，定义的运算不同，则它们是不同的线性空间．

2．除 $V=\{0\}$ 可构成线性空间外，任何有限集，能否对数域 P 构成线性空间？

答　除 $V=\{0\}$ 外，任何含一个非零元 $\alpha\in V$，则，则必含无穷多个元 $n\alpha$，其中 n 为整数．换句话说，V 只有两种可能，要就是单元素集 $\{0\}$，要就是无限集．

3．实（复）线性空间中元素是否一定是实（复）数？

答　V 称为实线性空间，是指它是实数域上的一个线性空间，V 本身并不一定是实数．比如，V 是一切实 n 阶方阵所成集合，则 V 关于矩阵的加法运算与数乘运算构成实线性空间．V 本身不包含任何一个实数作为其元素．

4．线性空间定义中，几条公理是否独立？

答　第 1 条（加法的交换律）可由其他七条推出，因此第一条不独立，可以去掉．事实上

设 $\forall\alpha,\ \beta\in V$，则

$$2(\alpha+\beta)=2\alpha+2\beta=(1+1)\alpha+(1+1)\beta$$

$$=(1\alpha+1\alpha)+(1\beta+1\beta)=(\alpha+\alpha)+(\beta+\beta)$$

$=\alpha+(\alpha+\beta)+\beta$

另一方面，又有：

$$2(\alpha+\beta)=(1+1)(\alpha+\beta)=1(\alpha+\beta)+1(\alpha+\beta)$$

$=(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)=\alpha+(\beta+\alpha)+\beta$

$\therefore\quad \alpha+(\alpha+\beta)+\beta=\alpha+(\beta+\alpha)+\beta$

上式两边从左边加$(-\alpha)$，从右边加$(-\beta)$，即得

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha.$$

那么，为什么不从线性空间的定义中把第1条去掉呢？这是因为这条性质很重要，经常要用到，习惯上我们就把它保留在线性空间的定义中了．除此之外，其余七条均独立．每一条均不可取消．否则将与原定义不等价．有兴趣的读者可参见《数学通报》1980年第11期"关于线性空间的定义"和《数学通报》1983年第4期中"向量空间定义中一公理的独立性"中所给出的例子．

（三）题型归类

1．验证一个集合是否为线性空间．主要方法有以下三种：

（1）按定义逐条验证．

例1 设收敛于0的实数无穷序列的全体为V，P为实数域，加法定义为：$\forall\{a_n\}$，$\{b_n\}\in v$，$\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$；数乘定义为：$\forall k\in P$，$k\{a_n\}=\{ka_n\}$，问$V$是否为$P$上的线性空间？

解 $\because\quad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

$$\{a_n+b_n\}\in V.$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}ka_n=k\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

$$k\{a_n\}\in V$$

并且容易验证八条运算规则是满足的，所以 V 是 P 上的线性空间.

（2）证明所给集合构成子空间.

例2 V 表示次数小于 n 的实系数多项式全体，再添上零多项式. 令

$$W=\{f(x)\in V \mid f(1)=0\}$$

证明 W 是实线性空间.

证 $0\in W$，W 非空.

$\forall f(x),g(x)\in W$，$f(1)+g(1)=0$，则 $f(x)+g(x)\in W$.

$\forall k\in R$(实数域)，$kf(1)=0$，则 $kf(x)\in W$.

从而 W 为 V 的子空间，因此 W 是实线性空间.

（3）证明所给集合不构成线性空间

例3 设 W 为非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解集，W 是否为线性空间？

答 不是. 因为若 $AX=b$ 无解，W 为空集，当然 W 不是线性空间.

当 W 非空，由于 $b\neq 0$，则 $0\notin W$. 因此 W 不是线性空间.

2. 证明线性空间的性质

例4 求证：在线性空间中成立下列等式

1） $-(-\alpha)=\alpha$，

2） $-(k\alpha)=(-k)\alpha=k(-\alpha)$，

3） $k(\alpha-\beta)=k\alpha-k\beta$.

证 1）因 $\alpha+(-\alpha)=0$，把 α 看作 $-\alpha$ 的负元，所以 $\alpha=-(-\alpha)$.

2) $k\alpha+(-k)\alpha=(k+(-k))\alpha=0$,

$$\therefore \quad (-k)\alpha=-(k\alpha).$$

另一式类似可证.

3) $k(\alpha-\beta)=k(\alpha+(-\beta))=k\alpha+k(-\beta)$

$$=k\alpha+(-k)\beta=k\alpha-k\beta.$$

例5 设 W, H 为线性空间 V 的两个子空间. 问 $W\cap H$ 与 $W\cup H$ 是否为 V的子空间? 为什么?

答 $W\cap H$ 是 V 的子空间, $W\cup H$一般不是子空间.

下面我们证明: $W\cup H$ 是 V 的子空间$\Longleftrightarrow W\subseteq H$ 或 $H\subseteq W$(东北师大研究生入学试题).

证 充分性是显然的. 下证必要性. 用反证法, 假如 W, H 互不包含。那么有

$$\alpha\in W,\ \alpha\notin H. \tag{1}$$

$$\beta\in H,\ \beta\notin W. \tag{2}$$

但 α, $\beta\in W\cup H$, 由于 $W\cup H$ 是子空间, $\alpha+\beta\in W\cup H$. 这时 $\alpha+\beta\in W$ 或 $\alpha+\beta\in H$. 但这都不可能. 若 $\alpha+\beta\in W$

$$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha\in W$$

这与(2)式矛盾. 若 $\alpha+\beta\in H$, 则

$$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta\in H$$

与(1)式矛盾.

从而 W, H 不可能互不包含, 即 $W\subseteq H$ 或 $H\subseteq W$.

§2 基、维数与坐标

(一) 内容提要

1. (1) 如果 V 中有 n 个线性无关的向量, 且没有更多数目的线性无关向量, 称 V 为 n 维的. 记作 $\dim V=n$. 若在 V 中可以找到任意多个无关向量称 V 为无限维的.

(2) 数域P上n维线性空间V_n中，n个线性无关的向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$称为$V_n$的一组基.(或称基底；底.)

这时$\forall\alpha\in V_n$，存在$a_1,a_2,\cdots,a_n\in P$. 有$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$称为$\alpha$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$下的坐标. 记为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

2．在V中n个向量：

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n \quad (\text{I})$$

线性无关，且$\forall\beta\in V$可被(I)线性表示，则V是n维的，且(I)是V的一组基.

3．若$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\cdots,\beta_n$是线性空间V的两组基，则

$$(\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A \tag{1}$$

称为$\alpha_1\cdots\alpha_n$到$\beta_1,\cdots,\beta_n$的基变换公式，其中可逆阵A称为过渡矩阵.

$$(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\beta_1\cdots\beta_n)A^{-1} \tag{2}$$

是$\beta_1,\cdots,\beta_n$到$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的基变换公式，A^{-1}为其相应的过渡矩阵.

4．在上述记号下，若$\gamma\in V$,

$$\gamma=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\beta_1\cdots\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \tag{3}$$

(3)式称为基变换下的向量坐标变换公式.

5．几类重要线性空间的维数与基

1) $P^n=\{(a_1,\cdots,a_n)\,|\,a_i\in P\}$

$$\dim P^n=n.$$

$(1,0,\cdots,0)$，$(0,1,0\cdots0)$，$\cdots$，$(0,\cdots,0,1)$ 为 P^n 的一组基.

2）$P^{n\times m}=\{A|A$ 为 P 上 $n\times m$ 矩阵$\}$

$$\dim P^{n\times m}=nm.$$

$\{E_{ij}|i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m\}$为 $P^{n\times m}$ 的一组基.

3）$A\in P^{m\times n}$ 设齐次方程组为 $AX=0$，解空间

$$W=\{\alpha|\alpha\in P^{n\times 1},\ A\alpha=0\},$$

$$\dim W=n-r，其中\ r=秩(A).$$

基础解系　$\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$ 为 W 的一组基.

4）$P[x]_n$ 表示数域P 上次数小于 n 的多项式全体，再加上零多项式.

$$\dim P[x]_n=n.$$

$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 为 $P[x]_n$ 的一组基.

5. V 是线性空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in V$，令

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=\{k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m|k_i\in P\}$$

$$\dim L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=秩\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}\leqslant m.$$

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 中一个极大线性无关组即为 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 的一组基.

6. $V_1\subseteq V$，$\dim V_1=\dim V\Longrightarrow V_1=V$.

（二）答疑辅导

1. 研究线性空间的基底、维数、坐标对掌握线性空间有什么好处？

答　一般而言，一个线性空间中有无穷多个元素，如何掌握和表达它们呢？亦即它们之间的关系如何？再者，线性空间的元素是抽象的，如何使之与数发生关系，以便于表达

和对它们施行运算？为此，我们通过线性空间向量之间的线性关系引入了基底、维数、坐标概念．这些都是R^2、R^3中坐标系概念的推广，它使得对向量的表达和运算数量化了．是我们研究向量性质的有力工具．

2．线性空间的一组基是否可以说是它的一个极大无关组？

答　可以．这里我们再一次看到了极大无关组对于研究向量组所起的重要作用．掌握了一个向量组的一个极大无关组，就等于掌握了整个向量组；同样地，掌握了线性空间的一组基，就等于掌握了整个线性空间．

3．基选取的多样性有什么好处？

答　一个线性空间有无穷多组基，基选取是任意的，这样我们就可以适当地选取基，使得我们所研究的问题得以简化．比如：在下章，我们可以适当选取基，使得线性变换的矩阵最简单．

（三）题型归类

1．求线性空间的维数与一组基．

例1　（厦门大学，湘潭大学研究生入学试题）　设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&2\end{pmatrix},\quad W=\{B\in P^{3\times3}\mid AB=BA\}$$

求 W 的维数与一组基．

解　设　$B=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\\x_7&x_8&x_9\end{pmatrix}$，由$AB=BA$，得方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + x_3 \\ x_2 = x_2 + x_3 \\ x_3 = 2x_3 \\ x_4 = x_4 + x_6 \\ x_5 = x_5 + x_6 \\ x_6 = 2x_6 \\ 3x_1 + x_4 + 2x_7 = x_7 + x_9 \\ 3x_2 + x_5 + 2x_8 = x_8 + x_9 \\ 3x_3 + x_6 + 2x_9 = 2x_9 \end{cases}$$

化简后为

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_6 = 0 \\ x_7 = -3x_1 - x_4 + x_9 \\ x_8 = -3x_2 - x_5 + x_9 \end{cases}$$

让 x_1, x_2, x_4, x_5, x_9 作自由未知量．令

$x_1 = 1, x_2 = x_4 = x_5 = x_9 = 0$ 得 $x_7 = -3, x_8 = 0$，即得

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

依次还有

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

可证 $B_i \in W (i = 1,2,3,4,5)$，且 $B_1, \cdots, B_5$ 线性无关，

任取 $B\in W$,

$$B=l_1B_1+\cdots+l_5B_5 \qquad (1)$$

(1)式有解. 事实上

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\in W$$

由 (1) 式解得

$$l_1=b_{11},\ l_2=b_{21},\ l_3=b_{22},\ l_4=b_{33},\ l_5=b_{12}.$$

(1)式有解，表明 B 可由 $B_1,\cdots,B_5$ 线性表出. 故 $B_1,\cdots,B$ 为 W 的一组基. $\dim W=5$.

例2 （吉林工业大学研究生入学试题）若以 $f(x)$ 表示实系数项式，试证

$$W=\{f(x)\,|\,f(1)=0,\ 次\ f(x)\leqslant n\ 或\ f(x)=0\}$$

是实数域上线性空间，并求出它的一组基.

证 仿上节例 2 可证 W 是线性空间. 令

$$f_k(x)=x^k-1\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

显然 $f_k(x)\in W$，易证 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 线性无关. 设

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in W$$

则
$$f(1)=a_n+\cdots+a_1+a_0=0,$$

$$f(x)=a_nf_n(x)+\cdots+a_1f_1(x).$$

从而 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 为 W 的一组基. $\dim W=n$.

2. 验证基

例3 设 $R[x]_n$ 是一切次数小于 n 的实系数多项式，加上零多项式所形成的线性空间. 试证：$1,(x-1),(x-1)^2,\cdots,(x-1)^{n-1}$ 是 $R[x]_n$ 的一组基.

证 令 $\beta_0=1$，$\beta_k=(x-1)^k\quad (k=1,\cdots,n-1)$

已经知道$1,x,\cdots,x^{n-1}$为$R[x]_n$的一组基．$\beta_0,\cdots\beta_{n-1}$可由它表出，即

$$(\beta_0,\beta_1\cdots\beta_{n-1})=(1,x,\cdots x^{n-1})A \qquad (1)$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n-1}\\ 0 & 1 & -2 & \cdots & c_{n-1}^1(-1)^{n-2}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & c_{n-1}^2(-1)^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

由于$|A|=1$，所以$\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}$线性无关，从而为$R[x]_n$的一组基．

3．**求过渡矩阵．**

1）直接求法

例4 设P^4的两组基为

$$\alpha_1=(1,2,-1,0),\qquad \beta_1=(1,2,3,4)$$
$$\alpha_2=(1,1,0,0)\qquad \beta_2=(-2,1,-4,3)$$
$$\alpha_3=(1,-1,2,1)\qquad \beta_3=(2,-4,-1,2)$$
$$\alpha_4=(0,1,1,-1)\qquad \beta_4=(4,3,-2,-1)$$

求由$\alpha_1,\cdots,\alpha_4$到$\beta_1,\cdots,\beta_4$的过渡矩阵A．

解 由假设知

$$(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)A \qquad (1)$$

把$\beta_1,\cdots,\beta_4,\alpha_1,\cdots,\alpha_4$分别用列向量代入(1)式两端，即令

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 8 & 4\\ 2 & 1 & -4 & 3\\ 3 & -4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

代入(1)式后有$B=CA$,

$$A=C^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}22 & 17 & -14 & -9\\ -32 & -26 & 24 & 22\\ 12 & 5 & -4 & -5\\ 4 & -1 & -8 & -3\end{pmatrix}.$$

2）间接求法

例5 在 $R[x]_2$ 中有两组基

$$\alpha_1=1 \qquad \beta_1=2$$

$$\alpha_2=x-1 \qquad \beta_2=x-2$$

$$\alpha_3=(x-1)^2 \qquad \beta_3=(x-2)^2$$

求 β_1,β_2,β_3 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵 A.

解 $(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)A$ （1）

在 $R[x]_2$ 中，已知一组基 $1,x,x^2$. 现在通过它作媒介，求 A 由于

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=(1,x,x^2)B \qquad (2)$$

$$(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=(1,x,x^2)C \qquad (3)$$

其中

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

将(2),(3)式代入(1)式得

$$(1,x,x^2)B=(1,x,x^2)(CA)$$

$$B=CA,\qquad A=C^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

4．求坐标

例6 （中国科技大学研究生入学试题）若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基，证明α_1，$(\alpha_1+\alpha_2),\cdots,(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$ 也是 V

的一组基．又若向量 α 关于前一组基的坐标是$(n,n-1,\cdots,2,1)$．求 α 关于后一组基的坐标．

解 令 $\beta_k=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$ 则

$$(\beta_1,\cdots \beta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A \tag{1}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

由于$|A|=1$．A 为过渡矩阵，这样得证 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 V 的一组基．即 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)$ 为 V 的一组基．

另外，由假设知

$$\alpha=(\alpha_1\cdots\alpha_n)X, \tag{2}$$

其中 $$X=(n,n-1,\cdots,2,1)'$$

将(1)代入(2)得

$$\alpha=(\beta_1,\cdots,\beta_n)A^{-1}X$$

其中

$$A^{-1}X=(1,1,\cdots,1)'$$

故 α 在 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$ 下坐标为$(1,1,\cdots,1)$．

§3 子空间及其运算

（一）内容提要

1．如果 $W\subset V$ 非空，且 W 对于 V 的两种运算也构成线性空间，称 W 为 V 的一个线性子空间(或子空间)．

2．W是V 的子空间$\Longleftrightarrow$(1)W 非空,(2)$\alpha,\beta\in W$则 $\alpha+\beta\in W$,(3)$\forall\alpha\in W\ \forall k\in P$ 则$k\alpha\in W$．

3．若

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V, \tag{1}$$

则由(1)的所有可能的线性组合生成的子空间称为由(1)生成的子空间(或称由(1)所张成的子空间)，记为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$．

4．子空间的分类．

(1) 平凡子空间．(零子空间及 V 本身．)

(2) 非平凡子空间．常用到的非平凡子空间有：

1) $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$；

2) 齐次线性方程组的解空间；

3) 矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征子空间 V_λ；

4) 线性变换 σ 的值域：

即 $V=\{\sigma\xi|\xi\in V\}$，其维数等于 σ 的秩；

5) σ 的核．

即 $\sigma^{-1}(0)=\{\sigma\xi=0|\xi\in V\}$，其维数等于 $\dim V-\sigma$ 的秩．

5．关于子空间的常用结果：

(1) $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_3)\Longleftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价．

(2) $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 维数＝秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$．

(3) $L(\alpha_1,\cdots\alpha_s)+L(\beta_1,\cdots,\beta_t)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$．

(4) V 的子空间 W 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 必可扩充为 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$．

6．关于子空间的两种运算：

(1) 若 V_1,V_2 是 V 的两个子空间，

$V_1\cap V_2$ 称为 V_1 与 V_2 的交空间．记作 $V_1\cap V_2$．

$V_1+V_2=\{\alpha_1+\alpha_2|\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2\}$ 称为 V_1 与 V_2 的和空间．记作 V_1+V_2．

(1) $V_1 \cap V_2$ 与 V_1+V_2 的均是 V 的子空间.

子空间的交与和满足交换律、结合律.

以上定义与结论可推广到多个子空间的情况.

(3) $V_1 \cap V_2 \subseteq V_i \subseteq V_1+V_2$ $(i=1,2)$

(4) 维数公式如下：

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2) \quad (\text{I})$$

称为第一维数公式.

常用的关于维数的公式还有：

$$\dim TW+\dim(T^{-1}(0)\cap W)=\dim W. \quad (\text{II})$$

$$\dim TV+\dim T^{-1}(0)=\dim V. \quad (\text{III})$$

其中T 为线性变换，上面两式分别称为第二维数公式和第三维数公式.

（二）答题辅导.

1．线性空间的一部分是否一定构成子空间？满足什么条件时，才能构成子空间？

答　线性空间的一部分一般不构成子空间．只有当它是非空子集合且对 V 的两种运算是封闭时才构成子空间.

2．两个子空间的并是否一定构成子空间？

答　两个子空间的并，一般不构成子空间．比如：R^2 中过原点的两条不同的直线是 R^2 的两个子空间．它们的并显然不是子空间．事实上，这两条直线上不为零的两向量之和不再属于这两条直线.

特殊情况下，并也可能成为子空间，这在 p.155本章§1例 5 中已讨论过.

3．维数公式（Ⅰ）是否可以推广到多个子空间的情况？（福建师大研究生入学试题）

答　可以．设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 为线性空间 V 的子空间，

则有 $\dim\left(\sum_{i=1}^{s} V_i\right)=\sum_{i=1}^{s}\dim(V_i)-\sum_{i=2}^{s}\dim\left(V_i\cap\sum_{k=1}^{i-1}V_k\right)$.

事实上，根据维数公式（Ⅰ），有

$$\dim(V_2\cap V_1)=\dim V_2+\dim V_1-\dim(V_1+V_2)$$

$$\dim(V_3\cap(V_1+V_2))=\dim V_3+\dim(V_1+V_2)-\dim(V_1+V_2+V_3)$$

……

$$\dim\left[V_{s-1}\cap\left(\sum_{k=1}^{s-2}V_k\right)\right]=\dim V_{s-1}+\dim\left(\sum_{k=1}^{s-2}V_k\right)-\dim\left(\sum_{k=1}^{s-1}V_k\right)$$

$$\dim\left[V_s\cap\left(\sum_{k=1}^{s-1}V_k\right)\right]=\dim V_s+\dim\left(\sum_{k=1}^{s-1}V_k\right)-\dim\left(\sum_{k=1}^{s}V_k\right)$$

把上列 $(s-1)$ 个式子两边各自相加，便得：

$$\sum_{i=2}^{s}\dim\left(V_i\cap\sum_{k=1}^{i-1}V_k\right)=\sum_{k=1}^{s}\dim(V_k)-\dim\left(\sum_{k=1}^{s}V_k\right).$$

（三）题型归类

1．子空间的判定

例1 设 V 为数域 P 上 n 维线性空间，$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 V 的一组基．$A\in P^{m\times n}$，令

$$W=\{\alpha\in P^{n\times 1}\mid A\alpha=0\} \qquad (1)$$

$$V_1=\left\{\sum_{i=1}^{n}c_i\beta_i \,\middle|\, \alpha=(c_1\cdots c_n)'\in W\right\} \qquad (2)$$

1）证明 V_1 是 V 的子空间；

2）求 V_1 的维数．

证　1）V_1 非空是显然的．$\forall\ \gamma_1,\gamma_2\in V_1$，$k\in P$，则

$$\gamma_1=\sum_{i=1}^{n}c_i\beta_i \qquad (c_1,\cdots,c_n)'\in W$$

$$\gamma_2=\sum_{i=1}^{n}d_i\beta_i \qquad (d_1,\cdots,d_n)'\in W$$

$$\gamma_1+\gamma_2=\sum_{i=1}^{n}(c_i+d_i)\beta_i$$

因为 $(c_1+d_1,\cdots,c_n+d_n)'\in W$ 所以 $\gamma_1+\gamma_2\in V_1$. 其次

$$k\gamma_1=\sum_{i=1}^{n}(kc_i)\beta_i$$

因 $k(c_1,\cdots,c_n)'\in W$，所以 $k\gamma_1\in V_1$. 即证 V_1 为 V 的子空间.

2）设秩$(A)=r$，则 $\dim W=n-r$. 取 W 的基础解系为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$. 令

$$\gamma_1=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\alpha_1,\ \cdots,\ \gamma_{n-r}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\alpha_{n-r}.$$

先证 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-r}$ 线性无关. 事实上

$$0=k_1\gamma_1+\cdots+k_{n-r}\gamma_{n-r}$$
$$=(\beta_1,\cdots,\beta_n)(k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r})$$
$$\therefore\quad k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}=0$$
$$k_1=\cdots=k_{n-r}=0.$$

再任取 $\gamma\in V_1$，那么 $\gamma=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\alpha$，其中 $\alpha\in W$. 则 $\alpha=l_1\alpha_1+\cdots+l_{n-r}\alpha_{n-r}$,

$$\therefore\quad \gamma=(\beta_1,\cdots,\beta_n)(l_1\alpha_1+\cdots+l_{n-r}\alpha_{n-r})$$
$$=l_1\gamma_1+\cdots+l_{n-r}\gamma_{n-r}.$$

这样得证 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-r}$ 为 V_1 的一组基.

$$\therefore\qquad \dim V_1=n-r.$$

例2 设 $A\in P^{n\times n}$，令

$$F(A)=\{f(A)\mid f(x)\in P[x]\} \tag{1}$$

1）证明$F(A)$是$P^{n\times n}$的一个子空间；

2）$\dim F(A)=m$，其中m为A的第n个不变因子$d_n(\lambda)$的次数；

3）$F(A)\subseteq C(A)$其中$C(A)$是全体与A可交换的矩阵组成的$P^{n\times n}$的子空间.

证 1）$A\in F(A)$，所以$F(A)$是非空子集，任取$f(A)$，$g(A)\in F(A)$，其中$f(x)\in P[x]$，$g(x)\in P[x]$. 那么$f(x)+g(x)\in P[x]$，从而$f(A)+g(A)\in F(A)$.

任取$k\in P$，$kf(x)\in P[x]$，所以$kf(A)\in F(A)$. 即证$F(A)$为$P^{n\times n}$的子空间.

2）设$d_n(\lambda)=\lambda^m+b_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+b_1\lambda+b_0$，由p.204第六章§3知，$d_n(\lambda)$为$A$的最小多项式. 则$E,A,\cdots,A^{m-1}$为$F(A)$的一组基. 先证它线性无关，设若存在不全为零的$k_0,k_1,\cdots,k_{m-1}$使

$$k_0E+k_1A+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}=0.$$

这与$d_n(\lambda)$为最小多项式的假设矛盾.

再任取$f(A)\in F(A)$，下证$f(A)$可由$E,A,\cdots,A^{m-1}$线性表出. 事实上对$f(x)\in P[x]$，存在$g(x),r(x)\in P[x]$，有

$$f(x)=g(x)d_n(x)+r(x)\quad 其中\ r(x)=0\ 或\ \partial r<\partial d_n \quad (1)$$

若$r(x)=0$，则$f(A)=0$，当然可由$E,A,\cdots,A^{m-1}$线性表出. 若$r(x)\neq 0$，则$\partial r<m$. 不妨设

$$r(x)=c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_1x+c_0$$

则由于$d_n(A)=0$，因此由(1)式得

$$F(A)=r(A)=c_{m-1}A^{m-1}+\cdots+c_1A+c_0E.$$

综上得证$\dim F(A)=\partial d_n(x)$.

3）$\forall f(A)\in F(A)$，因为$f(A)A=Af(A)$，所以$f(A)$

$\in C(A)$. 即证 $F(A)\subseteq C(A)$.

2. 求生成子空间的一组基

例3 已知 $\alpha_1=(2,0,1,3)$, $\alpha_2=(0,3,1,0)$, $\alpha_3=(1,2,0,2)$ $\alpha_4=(2,6,3,3)$ 求 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的维数与一组基.

解 由于 $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=$秩$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$, 因此用第三章的知识, 求出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性元关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. 所以 $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的一组基.

3. 求和空间的一组基.

例4 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基, A 是 $n\times s$ 矩阵,

$$(\beta_1\cdots\beta_s)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A$$

证明: 1) 若秩 $(A)=r$, 设 A 的列向量的极大线性无关组为 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_r}$. 则 $\beta_{i_1},\cdots\beta_{i_r}$ 是 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的一个极大无关组.

2) $\dim L(\beta_1,\cdots,\beta_s)=r=$秩$(A)$.

证 设 $A=(A_1,A_2,\cdots,A_s)$, 其中 A_j 为列向量.

1) 先证 $\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_r}$ 线性无关.

$$\begin{aligned}0&=k_1\beta_{i_1}+\cdots+k_r\beta_{i_r}\\&=k_1(\alpha_1\cdots\alpha_n)A_{i_1}+\cdots+k_r(\alpha_1\cdots\alpha_n)A_{i_r}\\&=(\alpha_1\cdots\alpha_n)(k_1A_{i_1}+\cdots+k_rA_{i_r})\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad k_1A_{i_1}+\cdots+k_rA_{i_r}=0$$

但 $A_{i_1},\cdots,A_{i_r}$ 线性无关, 所以 $k_1=\cdots=k_r=0$, 即 $\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_r}$ 线性无关.

再证任取 β_j 均可由 $\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_r}$ 线性表出. 因为 $A_j=l_1A_{i_1}+\cdots+l_rA_{i_r}$ 所以

$$\beta_j=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A_j=(\alpha_1\cdots\alpha_n)(l_1A_{t_1}+\cdots+l_rA_{t_r})$$
$$=l_1(\alpha_1\cdots\alpha_n)A_{t_1}+\cdots+l_r(\alpha_1\cdots\alpha_n)A_{t_r}$$
$$=l_1\beta_{t_1}+\cdots+l_r\beta_{t_r}.$$

从而得证 $\beta_{t_1},\cdots,\beta_{t_r}$ 为 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的 一个极大线性无关组.

2) $\dim L(\beta_1,\cdots,\beta_s)=$ 秩$\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}=r=$ 秩(A).

例5 $V=P[x]_4$ $\alpha_1=x^2+x+1$, $\alpha_2=x^2+1$, $\beta_1=x$, $\beta_2=2+2x+2x^2$ 求 $L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)$ 的维数与一组基.

解 $L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$

而 $1,x,x^2,x^3$ 为 V 的一组基. 且

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}1&1&0&2\\1&0&1&2\\1&1&0&2\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

令
$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&2\\1&0&1&2\\1&1&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)$$

可见 A_2,A_3 为 A 的列向量的一个极大线性无关组. 从而 α_2, β_1 为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ 的一组基. 且维数为 2. 即

$$L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)=L(\alpha_2,\beta_1).$$

4. 求交空间的维数与一组基

例6 (天津大学研究生入学试题) 设 $\alpha_1=(1,2,1,0)'$, $\alpha_2=(-1,1,1,1)'$, $\beta_1=(2,-1,0,1)'$, $\beta_2=(1,-1,3,7)'$. $U=L(\alpha_1,\alpha_2)$, $W=L(\beta_1,\beta_2)$ 求 $U\cap W$ 与 $U+W$ 的维数与一组基.

解 $\dim U\cap W=\dim U+\dim W-\dim(U+W)$
$$=2+2-3=1$$

任取　$\gamma \in U \cap W$

$$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$$

$$\therefore\ k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2 = 0$$

$$k_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - l_1\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix} - l_2\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

令 $l_1=3$，解得 $l_2=-1$，$k_2=-4$，$k_1=1$

$$\begin{aligned}\therefore\qquad \gamma &= k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \\ &= \alpha_1 - 4\alpha_2 = (5,\ -2,\ -3,\ -4)\end{aligned}$$

$U \cap W = L(\gamma)$. 其中 γ 为 $U \cap W$ 的基.

易证　$U + W = L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)$. 即 $\dim(U+W)=3$，α_1，α_2, β_1 为 $U+W$ 的一组基.

5. 维数公式的应用

例7　（湘潭大学，中山大学研究生入学试题）设 V_1，V_2 是 n 维线性空间 V 的两个子空间，且

$$\dim(V_1+V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1 \qquad (1)$$

则 $V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$.

证　令 $\dim V_1 \cap V_2 = m$，$\dim V_1 = n_1$. 那么

$$m = \dim(V_1 \cap V_2) \leqslant \dim V_1 = n_1 \leqslant \dim(V_1+V_2) = m+1 \qquad (2)$$

由(2)式知 $n_1 = m$ 或 $n_1 = m+1$.

当 $n_1 = m$ 时，$\dim V_1 \cap V_2 = \dim V_1$，而 $V_1 \cap V_2 \subseteq V_1$ 所以 $V_1 \cap V_2 = V_1$，此即 $V_1 \subseteq V_2$.

当 $n_1 = m+1$ 时，$\dim V_1 = \dim(V_1+V_2)$，又 $V_1 \subseteq V_1 + V_2$，所以 $V_1 = V_1 + V_2$，此即 $V_2 \subseteq V_1$.

例8　设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是 n 维线性空间 V 的 S 个真子空间，证明：

1）存在 $\alpha\in V$，使得 $\alpha\overline{\in}V_i$ $(i=1,2,\cdots,s)$.

2）（清华大学研究生入学试题）存在 V 的一组基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 使得每个 β 不属于一切 V_j $(j=1,2\cdots s)$.

证 1）对 s 用数学归纳法．当 $s=1$ 时，结论显然成立．

归纳假设结论对 k 成立．即存在 $\alpha\in V$，但

$$\alpha\overline{\in}V_j\ (j=1,2\cdots k)$$

若 $\alpha\overline{\in}V_{k+1}$，则结论证毕．

若 $\alpha\in V_{k+1}$，可找 $\beta\overline{\in}V_{k+1}$．考虑以下向量组

$$\alpha+\beta,\ 2\alpha+\beta,\ \cdots,\ (k+1)\alpha+\beta$$

其中必有一个向量，不属于一切 $V_j(j=1,2,\cdots k)$．否则，一定有两个向量属于同一个 V_j，从而可证 $\alpha\in V_j$，这与 $\alpha\overline{\in}V_j$ 矛盾．设 $\gamma=l\alpha+\beta\overline{\in}V_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$．

下证 $\gamma\overline{\in}V_{k+1}$，否则 $\gamma\in V_{k+1}$ 则 $\gamma-\beta=l\alpha\in V_{k+1}$，即证 $\alpha\in V_{k+1}$，矛盾．从而 $\gamma\overline{\in}V_j(j=1,2,\cdots,k+1)$

2）由上题知存在 $\varepsilon_1\overline{\in}V_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$．$\varepsilon_1\neq0$，令 $V_{s+1}=L(\varepsilon_1)$．仍由上题存在

$$\varepsilon_2\overline{\in}V_j\ (j=1,2,\cdots,s+1) \tag{1}$$

可证 ε_1，ε_2 线性无关，否则存在不全为零的 k_1,k_2 使

$$0=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2 \quad 其中\ k_2\neq0.$$

$$\varepsilon_2=-\frac{k_1}{k_2}\varepsilon_1\in V_{s+1}$$

这与(1)式矛盾．

当 $n=2$ 时，结论证毕．否则再令 $V_{s+2}=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 仍为真子空间，又存在

$$\varepsilon_3\overline{\in}V_j\ (j=1,2,\cdots,s+2) \tag{2}$$

同理 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性无关．这样继续下去，即证存在V的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 使得 ε 不属于每一个 $V_j(j=1,2,\cdots,s)$.

§4 线性空间的分解

（一）内容提要

1．设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是线性空间 V 的子空间，$W=V_1+V_2+\cdots+V_s$，再满足下列条件之一，则称 W 为它们的直和，记为 $W=V_1\dotplus V_2\dotplus\cdots\dotplus V_s$（或 $W=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$）：

1）任意 $\alpha\in W$，α 的表示法唯一；

2）0 表示法唯一；

3）$V_i\cap\sum\limits_{j\neq i}V_j=\{0\}\quad(i=1,2,\cdots,s)$；

4）$\dim W=\sum\limits_{i=1}^{s}\dim V_i$.

2．若 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，σ 在某组基下矩阵为 A，且

$$f(\lambda)=(\lambda E-A)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}.$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 互不相同，$\sum r_i=n$，则

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s,$$

其中 $V_i=\ker(\sigma-\lambda_i 1_V)^{r_i}$ $(i=1,2,\cdots s)$ 称为根子空间.

（二）答疑辅导

1．和与直和有什么关系？

答 直和一定是和，和不一定是直和，比如在 R^3 中，$V_1\neq\{0\}$，则和 V_1+V_1 不是直和.

2．什么叫做补空间？

答 设 V_1 是线性空间 V 的子空间，若存在子空间 V_2，使得 $V=V_1\oplus V_2$，则称 V_2 为 V_1 的一个补空间.

3．补空间是否存在？是否唯一？

答 V_1 是 n 维线性空间 V 的子空间，则它的补空间一定存在.

事实上，若 $V_1=\{0\}$，则 $V_2=V$；若 $V_1\neq\{0\}$，设 $\dim V_1=m$. 取 V_1 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，再扩大为 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$，令 $V_2=L(\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n)$ 则 $V=V_1\oplus V_2$

其次，同一子空间，可能存在无穷多个不同的补，比如在 R^2 中，$V_1=L(\varepsilon)$ 其中 $\varepsilon=(1,0)$. 那么令 $\alpha_k=(k,1)$，$V_k=L(\alpha_k)$ $(k=1,2,\cdots)$ 都是 V_1 的补.

4. $V_i\cap(\sum\limits_{j\neq i}V_j)=\{0\}$，$i=1,2,\cdots s$ (1)

与下面条件(2)是否等价

$$V_i\cap V_j=\{0\},\ i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,s \tag{2}$$

答 这两个条件不等价. (1)式包含 s 个等式，即：

$$\begin{cases} V_1\cap(V_2+V_3+\cdots+V_s)=\{0\} \\ V_2\cap(V_1+V_3+\cdots+V_s)=\{0\} \\ \cdots\cdots \\ V_s\cap(V_1+V_2+\cdots+V_{s-1})=\{0\} \end{cases}$$

可以证明(1)$\Longrightarrow$(2)因为若(1)式成立，则 $i\neq j$ 这时有 $\{0\}\subseteq V_i\cap V_j\subseteq V_i\cap(\sum\limits_{j\neq i}V_j)=\{0\}$. 即 $V_i\cap V_j=\{0\}$.

反过来并不成立. 即由 (2) 并不能推出 (1). 比如，在 R^2 中，$V_1=\{(x,0)\mid x\in R\}$，$V_2=\{(0,y)\mid y\in R\}$，$V_3=\{(x,x)\mid x\in R\}$，显然，$V_i\cap V_j=\{0\}$，$(i\neq j)$. 而 $V_1\cap(V_2+V_3)=V_1\neq\{0\}$.

5. $W=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$ 还有没有其他的等价条件?

答 还有. 比如还有

5) $V_i\cap\left(\sum\limits_{j=1}^{i-1}V_j\right)=\{0\}$，$(i=1,2,\cdots,s)$ (3)

6) 设 V_i 的基为 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}$ $(i=1,2\cdots s)$ 则这些基的并是 W 的一组基.

我们先证(1)$\Longrightarrow$(3).

$$\{0\}\subseteq V_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}V_j\subseteq V_i\cap\sum_{j\neq i}V_j=\{0\}$$

从而(3)式成立.

再证(3)$\Longrightarrow$(1).

设 $0=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1}+\alpha_s$，其中 $\alpha_i\in V_i$，只要证 $\alpha_i=0, i=1,2,\cdots,s$ 即可.

$$-\alpha_s=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1}\in V_s\cap\left(\sum_{j=1}^{s-1}V_j\right)=\{0\}$$

则

$$\alpha_s=0,\quad \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1}=0$$

$$-\alpha_{s-1}=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-2}\in V_{s-1}\cap\left(\sum_{j=1}^{s-2}V_j\right)=\{0\}$$

可证 $\alpha_{s-1}=0$，$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-2}=0$. 以此类推,即证 $\alpha_i=0$. $(i=1,2,\cdots,s)$. 从而零向量的分解式是唯一的. 即(1) 成立. 从而(1)与(3)等价.

至于6)，实质上是

$$\dim W=\sum_{i=1}^{s}\dim V_i$$

具体实施而已，读者自己可以证明等价.

(三)题型归类

1. 证明子空间的和为直和

例1 (华中理工大学研究生入学试题) 令 $M_n(F)$ 是数域 F 上全体 n 阶方阵所组成的向量空间，令

$$S=\{A\in M_n(F)\mid A'=A\},\quad T=\{A\in M_n(F)\mid A'=-A\}.$$

试证：$M_n(F)=S\oplus T$.

证 任取 $A\in M_n(F)$，因

$$A=\frac{1}{2}(A+A')+\frac{1}{2}(A-A')=A_1+A_2,$$

其中$A_1=\frac{1}{2}(A+A')\in S$，　$A_2=\frac{1}{2}(A-A')\in T$．因此

$$M_n(F)=S+T.$$

又若$B\in S\cap T$，则$B=B'$，$B=-B'$，则必有$B=0$.从而$M_n(F)=S\oplus T$.

2．$V=\sigma V\oplus\sigma^{-1}(0)$的充要条件．

例2　设σ是n维线性空间V的线性变换，证明下述条件等价：

1）$V=\sigma V\oplus\sigma^{-1}(0)$.

2）$\sigma V\cap\sigma^{-1}(0)=\{0\}$.

3）若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$\sigma V$的一组基，则$\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_r$为$\sigma^2V$的一组基.

4）秩$(\sigma^2)=$秩(σ)

证　1）$\Longleftrightarrow$2）．显然.

　　2）$\Longrightarrow$3）．

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为$\sigma V$的一组基，下证$\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2,\cdots\cdots,\sigma\alpha_r$线性无关．设

$$k_1\sigma\alpha_1+k_2\sigma\alpha_2+\cdots+k_r\sigma\alpha_r=0.$$

则

$$\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)=0.$$

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r\in\sigma^{-1}(0)\cap\sigma V=\{0\}$$

$$\therefore\quad k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

又$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，故$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$.

再$\forall\beta\in\sigma^2V$，则$\beta=\sigma^2\alpha$，$\alpha\in V$，由$\sigma\alpha\in\sigma V$，故

$$\sigma\alpha=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_r\alpha_r$$

$$\therefore\quad\sigma^2\alpha=l_1\sigma(\alpha_1)+l_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+l_r\sigma(\alpha_r).$$

即证，β可由$\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_r$线性表出．从而$\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2$,

$\cdots, \sigma\alpha_r$ 是 $\sigma^2 V$ 的一组基.

3) $\Longrightarrow$ 4):

设秩$(\sigma)=m$. 取 σV 的一组基为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, 由3)知 $\sigma\alpha_1, \sigma\alpha_2, \cdots, \sigma\alpha_m$ 为 $\sigma^2 V$的一组基，从而秩$(\sigma^2)=m$.

4) $\Longrightarrow$ 2):

设 $\dim \sigma V=m$, 取 σV 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 则

$$\sigma V=L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$$

$$\sigma^2 V=\sigma L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)=L(\sigma\alpha_1, \sigma\alpha_2, \cdots, \sigma\alpha_m)$$

而由4)知：$\dim \sigma^2 V=\dim \sigma V$.

所以 $\sigma\alpha_1, \sigma\alpha_2, \cdots, \sigma\alpha_m$ 为 $\sigma^2 V$ 的一组基.

下证：$\sigma V \cap \sigma^{-1}(0)=\{0\}$. $\forall \alpha \in \sigma V \cap \sigma^{-1}(0)$, 则

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

$$0=\sigma(\alpha)=k_1\sigma\alpha_1+k_2\sigma\alpha_2+\cdots+k_m\sigma\alpha_m$$

但 $\sigma\alpha_1, \sigma\alpha_2, \cdots, \sigma\alpha_m$ 线性无关. $\therefore$ $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$. 即 $\alpha=0$.

$$\sigma V \cap \sigma^{-1}(0)=\{0\}.$$

例 3 （四川师大研究生入学试题） σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，若 $\sigma^2=\sigma$，则 $V=\sigma V \oplus \sigma^{-1}(0)$

证 $\because$ 秩$\sigma^2=$秩σ，由例 2 即得：$V=\sigma V \oplus \sigma^{-1}(0)$.

3. **直和分解.**

例4 （山东大学研究生入学试题） 设 $f(x)$是数域 P 上二次多项式，在 P 内有互异的根 λ_1, λ_2, σ 是数域 P 上线性空间 V 的一个线性变换，$\sigma \neq \lambda_1 I$, $\sigma \neq \lambda_2 I$, （I为单位变换），且满足 $f(\sigma)=0$. 证明：λ_1与λ_2是 σ 的特征值，而 V 可分解为 σ 属于 λ_1, λ_2 的特征子空间的直和，即 $V=V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2}$.

证 不失一般性，设

$$f(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$$

则有

$$f(\sigma)=(\sigma-\lambda_1 I)(\sigma-\lambda_2 I)=0 \qquad (1)$$

由于 $\sigma\neq\lambda_2 I$，从而存在 $\beta\in V$，使 $\xi=(\sigma-\lambda_2 I)\beta\neq 0$，但 $(\sigma-\lambda_1 I)\xi=(\sigma-\lambda_1 I)(\sigma-\lambda_2 I)\beta=0$.

$$\therefore \qquad \sigma\xi=\lambda_1\xi$$

即证 λ_1 是 σ 的一个特征值. 同理可证：λ_2 亦是 σ 的一个特征值.

令 V_{λ_1}，V_{λ_2} 分别为属于 λ_1，λ_2 的特征子空间，现证 $V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}$.

$\forall\alpha\in V$，则

$$\alpha=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\sigma-\lambda_2 I)\alpha-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\sigma-\lambda_1 I)\alpha$$

$$=\alpha_1+\alpha_2 \qquad (2)$$

其中 $\alpha_1=\dfrac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)}(\sigma-\lambda_2 I)\alpha$，$\alpha_2=\dfrac{-1}{(\lambda_1-\lambda_2)}(\sigma-\lambda_1 I)\alpha$.

由（1）式，有 $(\sigma-\lambda_i I)\alpha_i=0$，$(i=1,2)$

$\therefore \qquad \sigma\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$，$\alpha_i\in V_{\lambda_i}$ $(i=1,2)$

再由（2）式得知：$V=V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2}$.

$\forall\gamma\in V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}$，有 $\gamma\in V_{\lambda_1}$，$-\gamma\in V_{\lambda_2}$

$0=\gamma+(-1)\gamma$.

由于属于不同的特征值之特征向量是线性无关的，所以 $\gamma=0$. 故 $V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}=\{0\}$.

$$\therefore \qquad V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}.$$

§5 同构

（一）内容提要

1. V，V' 都是数域 P 上的线性空间，如果由 V 到 V'

有一个双射 σ，具有

(1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$

(2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$

其中$\forall\alpha,\beta\in V$，$k\in P$. 则 σ 称为同构映射，V，V' 称为同构的. 记为 $V\cong V'$.

2. 同构映射的基本性质.

(1) $\sigma(0)=0$; $\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$

(2) $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_r\sigma(\alpha_r)$.

(3) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$ 是线性相关的（或线性无关的）$\Longleftrightarrow\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_r)\in V'$ 是线性相关的. （或线性无关的. ）

(4) 同构映射的逆映射是同构映射，两个同构映射的乘积还是同构映射.

3. 数域 P 上两个有限维线性空间 V，V' 同构 $\Longleftrightarrow$ $\dim V=\dim V'$.

（二）答疑辅导

1. σ 是 V 到 V' 的同构映射，则有

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$$
$$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$$

等式两边加法与数乘是否是同一种运算?

答　一般是不相同的. V 中有加法运算"+"，数乘运算"·"，而 V' 中加法运算为"$\oplus$"，数乘运算为"$\odot$". 因此，上式应写为

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)\oplus\sigma(\beta)$$
$$\sigma(k\cdot\alpha)=k\odot\sigma(\alpha)$$

但每次这样写法过于繁琐，因此在不会引起混淆的情况下，

省略地写成题中形式.

2. 试比较映射，线性变换，同构映射三个概念.

答 映射是表达两个集合 M 与 M' 元素之间的对应关系. 线性变换是线性空间 V 到自身的（即 $M=M'=V$）并保持线性性质的映射.

同构映射是为比较数域 P 上两个线性空间 V、V' 的代数结构是否相同而引入的. 它是在两个线性空间 V 与 V' 元素之间建立的双射，保持线性性质.

显然，同构映射与线性变换都是特殊映射，它们都要求保持线性性质. 所不同的是线性变换是线性空间映射到自身上的，并不要求双射；而同构映射是建立在两个线性空间之间的映射，它要求是双射.

（三）题型归类

1. 建立同构映射.

例1 设 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 和 $V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 都是数域 P 上 m 维线性空间，试给出 V_1 到 V_2 的一个同构映射.

解 $\forall\alpha\in V_1$，$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$ 令

$$\sigma(\alpha)=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_m\beta_m$$

则 σ 是 V_1 到 V_2 的映射. 可证 σ 为同构映射.

$$\therefore \qquad V_1\cong V_2.$$

2. 求线性空间的维数.

例2 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，$L(V)$ 是 V 的一切线性变换的全体.

1) 证明：$L(V)$ 也是 P 上线性空间.

2) 求 $\dim L(V)$.

证 1) $\forall\sigma,\tau\in L(V)$，我们知道 $\sigma+\tau$，$k\sigma\in L(V)$

还可验证几条算律也成立．因此 $L(V)$ 是 P 的线性空间．

2）取 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$\forall\sigma\in L(V)$，设 σ 在这组基下矩阵为 A_σ：

$$\sigma(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A_\sigma \tag{1}$$

作一个 $L(V)$ 到 $P^{n\times n}$ 的映射 f 如下：

$$f(\sigma)=A_\sigma$$

其中 A_σ 为线性变换 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵．

显然 f 是 $L(V)$ 到 $P^{n\times n}$ 为双射．

$\forall\sigma$，$\tau\in L(V)$，设 σ，τ 在基下矩阵分别为 A_σ，A_τ．

$(\sigma+\tau)(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(A_\sigma+A_\tau)$

$\therefore\quad f(\sigma+\tau)=A_\sigma+A_\tau=f(\sigma)+f(\tau)$

再，$\forall\, k\in P$，$\sigma\in L(V)$，同理可证：

$$f(k\sigma)=kf(\sigma).$$

故 f 为 $L(V)$ 到 $P^{n\times n}$ 的同构映射．这样

$$\dim L(V)=\dim P^{n\times n}=n^2.$$

§6 综合题

例1 设 V 为数域 P 上的线性空间，令

$$W=\{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\,|\,\alpha_i\in V\}$$

规定 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$，当且仅当 $\alpha_i=\beta_i$．

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)+(\beta_1,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m)$$

$$k(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=(k\alpha_1,\cdots,k\alpha_m)$$

证明：1）W 对所规定的运算作成 P 上的线性空间；

2）当 V 为 n 维线性空间时，W 是几维的？

3）当 V 为无限维时，W 也是无限维的．

证 1）W 对所给运算显然是封闭的．

另外，$(0,0,\cdots,0)$是 W 的零向量，其中 0 是 V 中的零向量；$(-\alpha_1,-\alpha_2,\cdots,-\alpha_m)$ 是 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 的负向量.

最后，根据 V 中向量所满足的运算律可推出 W 中向量也满足同样的算律，故 W 作成 P 上的线性空间.

2) 当 V 为 n 维线性空间时，W 为 P 上的 mn 维线性空间. 事实上，设 ε_1，ε_2，$\cdots$，ε_n 为 V 的一组基，则 W 的 mn 个向量

$$(\varepsilon_i,0,\cdots,0),\ (0,\varepsilon_i,0,\cdots,0),\ \cdots,\ (0,0,\cdots,\varepsilon_i),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

线性无关. $\forall(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\in W$，且

$$\alpha_j=k_{1j}\varepsilon_1+k_{2j}\varepsilon_2+\cdots+k_{nj}\varepsilon_n,\quad j=1,2,\cdots,m$$

$$\therefore\quad (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\left(\sum_1^n k_{i1}\varepsilon_i,\ \sum_1^n k_{i2}\varepsilon_i,\cdots,\ \sum_1^n k_{im}\varepsilon_i\right)$$

$$=\sum_1^n k_{i1}(\varepsilon_i,0,\cdots,0)+\cdots+\sum_1^n k_{im}(0,\cdots,0,\varepsilon_i)$$

即 W 中每个向量都可由向量组(1)中的 mn 个向量线性表示，故为 W 的一组基. 从而 $\dim W=mn$.

3) 当 V 为无限维时，设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$为 V 的无限个线性无关的向量，则

$$(\alpha_1,0,\cdots,0),\ (\alpha_2,0,\cdots,0)\cdots$$

也是 W 中的无限个线性无关的向量，故 W 也是无限维线性空间.

例 2（南开大学研究生入学试题） 设数域 P 上线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$. 其中

$$X=(x_1,\cdots,x_n)',\quad A=(a_{ij})_{m\times n},\quad B=(b_{ij})_{s\times n}$$

如果它们的一般解中含参数的个数和大于 n，证明：这两个方程组有非零的公共解.

解 设 $W=\{X|AX=0\}$，$\dim W=m$，

$$H=\{X|BX=0\},\ \dim H=s.$$

$$\dim(W+H)\leqslant n$$

由题设 $s+m>n$，由维数公式

$$\dim(W\cap H)=\dim W+\dim H-\dim(W+H)$$
$$\geqslant m+s-n>0$$

$W\cap H\neq\{0\}$. 故有非零公共解.

例 3（电视大学） 设三维向量空间的两组基为 ξ_1,ξ_2,ξ_3 和 η_1,η_2,η_3 且

$$\begin{cases}\eta_1=\xi_1-\xi_2\\ \eta_2=2\xi_1+3\xi_2+\xi_3\\ \eta_3=\xi_1+3\xi_2-\xi_3\end{cases}$$

求向量 $\alpha=2\eta_1-\eta_2+3\eta_3$ 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 下的坐标

解 $\alpha=2(\xi_1-\xi_2)-(2\xi_1+3\xi_2+\xi_3)+3(\xi_1+3\xi_2-\xi_3)$
$=3\xi_1+4\xi_2-4\xi_3$

故 α 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 下坐标为$(3,4,-4)$.

例 4（广西师大研究生入学试题） 线性空间 V 的线性变换 P 是 V 到某子空间上射影变换的充要条件是 P 为幂等变换.

证 必要性 设 P 是沿子空间 V_2 到子空间 V_1 的射影变换，即 $V=V_1\oplus V_2$，且$\forall\alpha\in V,\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，其中 $\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2$，$P\alpha=\alpha_1$，则

$$P^2\alpha=P\alpha_1=\alpha_1=P\alpha\qquad\therefore\quad P^2=P$$

充分性 设$P^2=P$. 由p.177例3知 $V=PV\oplus P^{-1}(0)$.
$\forall\beta\in V$，$\beta=\beta_1+\beta_2$，其中 $\beta_1\in PV$，$\beta_2\in P^{-1}(0)$则

$$\beta_1=P\gamma,\ \gamma\in V.\ P\beta_2=0$$

$$\therefore\quad P\beta=P\beta_1+P\beta_2=P\beta_1=P^2\gamma=P\gamma=\beta_1$$

即证 P 是沿 $P^{-1}(0)$到 PV 的射影变换.

例 5 设数域 P 上的 n 维线性空间 V 的一个线性变换 σ，满足 $\sigma^3-2\sigma^2-\sigma++2I=0$，其中 I 为恒等变换，

证明： 1) σ 的特征值只能是 -1，1，2；

2) $V=V_{-1}\oplus V_1\oplus V_2$

其中 $V_\lambda=\{\alpha\in V\mid\sigma\alpha=\lambda\alpha\}$.

证 1) 设 σ 在 V 的某一组基下矩阵为 A，由假设知，

$$g(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) \quad (1)$$

为 A 的零化多项式. $d_n(\lambda)$ 为 A 的最小多项式, $d_n(\lambda)\mid g(\lambda)$. 从而 $d_n(\lambda)$ 的根只能是 1，-1，2. 从而 A 的特征值只能是 1，-1，2.

2) A 的零化多项式 $g(\lambda)$ 无重根，从而 A 可对角化，由线性空间的分解定理，有

$$V=W_1\oplus W_2\oplus W_3$$

其中
$$W_1=\ker(\sigma-(-1)I_V)=\ker(\sigma+I_V)=V_{-1}$$
$$W_2=\ker(\sigma-I_V)=V_1$$
$$W_3=\ker(\sigma-2I_V)=V_2$$

例 6 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 是 P^n 中两个线性无关向量组，令 $V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$，$V_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$ (1)

$$\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_sx_s+\beta_1x_{s+1}+\cdots+\beta_tx_{s+t}=0 \quad (2)$$

$$A=(\alpha_1\cdots\alpha_s\ \ \beta_1\cdots\beta_t) \quad (3)$$

W 为齐次方程组(2)的解空间，求证

$$\dim W=\dim V_1\cap V_2 \quad (4)$$

证 $\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)$ (5)

$$\dim(V_1+V_2)=\dim L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$$
$$=\text{秩}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\ \beta_1,\cdots,\beta_t\}=\text{秩}(A) \quad (6)$$
$$\dim W=s+t-\text{秩}(A) \quad (7)$$

将(6)，(7)代入(5)，即证(4)式.

第六章　特征值与特征向量

§1　λ-矩阵的标准形

（一）内容提要

1．$A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{n\times m}$ 称为λ-矩阵，其中 $a_{ij}(\lambda)$为数域P上的多项式．

若$A(\lambda)$有一个$r(r\geqslant 1)$阶子式不为0，所有$r+1$阶子式都为0，则称$A(\lambda)$的秩为r．零矩阵的秩规定为0．

2．$A(\lambda)$为n阶λ-矩阵，若存在n阶λ-矩阵$B(\lambda)$，使得$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E$，则称$A(\lambda)$是可逆的．并且称$B(\lambda)$为$A(\lambda)$的逆矩阵，记为$B(\lambda)=A(\lambda)^{-1}$．

$A(\lambda)$可逆$\Longleftrightarrow |A(\lambda)|=c$（常数$c\neq 0$）．

3．下面三种$n\times n$矩阵，称为初等λ-矩阵

(1) 数字矩阵$P(i,j)$．它是交换E的第i行与第j行得出．

(2) 数字矩阵$P(i(c))$，它是用非零常数c乘E的第i行得出．

(3) λ-矩阵

$$P(i,j(\varphi(\lambda)))=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots\ \varphi(\lambda) & \\ & & & \ddots\ \vdots & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ (i)\\ \\ (j)\\ \\ \\ \end{matrix}$$

它是用$\varphi(\lambda)$乘E的第j行，再加到第i行得出.

对λ-矩阵作行(列)变换相当于左(右)乘初等λ-矩阵.

4. 若$A(\lambda)$经过若干次初等变换得到$B(\lambda)$，则称$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价，记为$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$. 或者说存在可逆矩阵$P(\lambda)$和$Q(\lambda)$，使得

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=B(\lambda).$$

等价关系具有反身性、对称性与传递性

5. 非零的$s\times n$ λ-矩阵$A(x)$都唯一等价它的标准形：

$$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{s\times n} \tag{1}$$

其中　$r=$秩$(A(\lambda))$，$d_i(\lambda)$是首项系数为1的多项式，且

$$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda) \quad (i=1,2,\cdots,r-1).$$

6. $A(\lambda)$的上述标准形(1)中，$d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$称为$A(\lambda)$的不变因子.

7. 设$s\times n$ λ-矩阵$A(\lambda)$的秩为$r(r\geqslant 1)$. 它的一切$s(s\leqslant r)$阶子式的项系数为1最大公因式记为$D_s(\lambda)$，则称$D_s(\lambda)$为$A(\lambda)$的s列与行列式因子. 初等因子与行列式因子之间有下述关系式

$$D_s(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_s(\lambda) \quad (s=1,2,\cdots,r) \tag{2}$$

或者

$$d_s(\lambda)=\frac{D_s(\lambda)}{D_{s-1}(\lambda)} \quad (s=1,2,\cdots r) \tag{3}$$

规定$D_0(\lambda)=1$.

9. $A(\lambda)$,$B(\lambda)$均为$s\times n$　λ-矩阵，则下面4句话等价

(1) $A(\lambda)\simeq B(\lambda)$;

(2) $A(\lambda),B(\lambda)$有相同的标准形;

(3) $A(\lambda),B(\lambda)$有相同的不变因子;

(4) $A(\lambda),B(\lambda)$有相同的行列式因子.

10. $A(\lambda)$为n阶可逆λ-矩阵，则$A(\lambda)\simeq E$, $A(\lambda)$的不变因子和行列式因子都是$1,\cdots,1$(n个)

（二） **答疑辅导**

1. 在数字矩阵中，两矩阵等价的充要条件是秩相等，在λ-矩阵中呢?

答 $A(\lambda),B(\lambda)$都是$s\times n$ λ-矩阵,若$A(\lambda)\simeq B(\lambda)$定有秩$(A(\lambda))=$秩$(B(\lambda))$.反之不一定成立，比如

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \lambda\end{pmatrix},\ B(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \\ & \lambda\end{pmatrix}$$

它们秩都等于2,但$A(\lambda)$有不变因子λ,λ.而$B(\lambda)$有不变因子$1,\lambda$.不变因子不相同，因此它们不等价.

2. $A(\lambda)$的标准形是不是对角阵?

答 若$A(\lambda)$是方阵，它的标准形是对角阵．一般而言，$A(\lambda)$的标准形，不是对角形．比如

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

已经是标准形了，但不能说它是对角阵.

3. $A(\lambda)$是n阶可逆λ-矩阵，怎样求$A(\lambda)^{-1}$呢?

答 与数字矩阵一样，常用的两种方法．下面通过一个例子来介绍．设

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \lambda\\ \lambda+1 & \lambda^2+\lambda+2\end{pmatrix}$$

(1) 用伴随矩阵法

$$A(\lambda)^{-1}=\frac{1}{|A(\lambda)|}A(\lambda)^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda^2+\lambda+2 & -\lambda\\ -(\lambda+1) & 1\end{pmatrix}.$$

(2) 用初等行变换法

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1 & 0\\ \lambda+1 & \lambda^2+\lambda+2 & 0 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 2 & -(\lambda+1) & 1\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1+\dfrac{(\lambda+1)\lambda}{2} & -\dfrac{\lambda}{2}\\ 0 & 2 & -(\lambda+1) & 1\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{\lambda^2+\lambda+2}{2} & -\dfrac{\lambda}{2}\\ 0 & 1 & -\dfrac{\lambda+2}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A(\lambda)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda^2+\lambda+2 & -\lambda\\ -(\lambda+1) & 1\end{pmatrix}.$$

4. 任何λ-矩阵为什么一定可表成λ多项式的形状?

答 我们先举一个例子，然后再作一般性讨论.

比如3×2 λ-矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^3+\lambda^2+1 & 3\lambda^2-4\\ \lambda-1 & \lambda^3-\lambda\\ \lambda^2+2 & 2\lambda^2+3\end{pmatrix}$$

则 $A(\lambda)=A_3\lambda^3+A_2\lambda^2+A_1\lambda+A_0$,

其中

$$A_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad A_0=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

我们看出A_i均为3×2矩阵(与$A(\lambda)$一致)，A_3是$A(\lambda)$中各个元素的最高次项的系数构成，A_2,A_1,A_0依次下降.

一般$A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$为$\lambda$-矩阵，如果所有$a_{ij}(\lambda)$中关于$\lambda$的最高次数为$t$，则

$$A(\lambda)=A_t\lambda^t+A_{t-1}\lambda^{t-1}+\cdots+A_0$$

其中A_t由$A(\lambda)$的各个元素中λ^t的系数组成.

（三） 题型分类

1. 求可逆阵

例1 下列λ-矩阵中，哪些是满秩的，哪些是可逆的，若可逆，试求其逆

1) $$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 2\lambda+1 & 1\\ 1 & \lambda+1 & \lambda^2+1\\ \lambda-1 & \lambda & -\lambda^2\end{pmatrix};$$

2) $$B(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & \lambda\\ \lambda & 1 & \lambda^2\end{pmatrix};$$

3) $$C(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0\\ 2 & \lambda & 1\\ \lambda^2+1 & 2 & \lambda^2+1\end{pmatrix}.$$

解 1) $|A(\lambda)|=0$, $A(\lambda)$不是满秩的，不可逆.

2) $|B(\lambda)|=\lambda^3-2\lambda^2$, $B(\lambda)$的秩为3，满秩，但$B(\lambda)$不可逆.

3) $|C(\lambda)|=-2$, $C(\lambda)$满秩，且可逆，其逆矩阵为：

$$C(\lambda)^{-1}=\frac{1}{-2}C^*(\lambda)$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda^3+\lambda-2 & -\lambda^2-\lambda & \lambda\\ -\lambda^2-1 & \lambda^2+1 & -1\\ 4-\lambda-\lambda^3 & \lambda^3+\lambda-2 & -\lambda\end{pmatrix}.$$

2. 求标准形

例2 （湖北省师范专业大学生数学竞赛题）求λ-矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda\end{pmatrix}$$

的标准形.

解

$$A(\lambda)\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 1 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & \lambda^2 & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda\end{pmatrix}=B(\lambda)$$

最后一个矩阵$B(\lambda)$为$A(\lambda)$的标准形.

3. 求不变因子与行列式因子

(1) 初等变换法，

比如上面例2，可得不变因子与行列式因子如下：

$$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda, d_3(\lambda)=\lambda^2+\lambda.$$

$$D_1(\lambda)=d_1(\lambda)=1,$$

$$\therefore\quad D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)=\lambda,$$

$$D_3(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)d_3(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2.$$

(2) 化对角形

例3 求

$$A(\lambda)=\begin{vmatrix}0 & \lambda+2 & 0 & 0\\ \lambda+1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0\end{vmatrix}$$ 的不变因子.

解

$$A(\lambda)\longrightarrow\begin{pmatrix}\lambda+1&&&\\&\lambda+2&&\\&&\lambda-1&\\&&&\lambda-2\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&g(\lambda)\end{pmatrix}$$

其不变因子为$1,1,1,g(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-2)$.

(3) 藉助于行列式因子

例4 求

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda-2&1&0&0\\0&\lambda+1&2&0\\0&0&\lambda&1\\0&3&4&\lambda^2+1\end{pmatrix}$$的标准形.

解 由于存在三阶行列式

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\\lambda+1&2&0\\0&\lambda&1\end{vmatrix}=2,$$

$\therefore\quad D_3(\lambda)=1,d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,$

$d_4(\lambda)=|A(\lambda)|=\lambda^5-\lambda^4-\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4.$

所以$A(\lambda)$的标准形为

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&d_4(\lambda)\end{pmatrix}.$$

§2 特征值与特征向量

（一） 内容提要

1．设P是数域，$A\in P^{n\times n}$，$\lambda E-A$称为A的特征矩阵，$|\lambda E-A|$称为特征多项式．

若存在$\lambda_0\in P$，使$|\lambda_0 E-A|=0$，则称λ_0为A的一个特征值．

若λ_0是A的一个特征值，齐次线性方程组$(\lambda_0 E-A)X=0$的非零解X_0称为A属于特征值λ_0的一个特征向量．

2．线性变换的特征值．设V是数域P上n维线性空间，$L(V)$是V的线性变换全体（以下类似）．$\sigma\in L(V)$．如果存在$\lambda_0\in P$，非零$\zeta\in V$，使得$\sigma\zeta=\lambda_0\zeta$，则称$\lambda_0$为$\sigma$的特征值，$\zeta$是$\sigma$属于$\lambda_0$的一个特征向量．

3．V是数域P上n维线性空间，$\alpha_1,\cdots\alpha_n$是V的一组基，$\sigma\in L(V)$，且

$$\sigma(\alpha_1,\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A.$$

则σ与A具有相同的特征值．

λ_0是A的特征值，$X_0\in P^{n\times 1}$是A属于λ_0的一个特征向量，则$(\alpha_1\cdots\alpha_o)X_0$是$\sigma$属于$\lambda_0$的特征向量．反之，若$(\alpha_1\cdots\alpha_n)Y$是$\sigma$属于特征值$\lambda_1$的一个特征向量，则$Y_1\in P^{n\times 1}$是$A$属于特征值$\lambda_1$的一个特征向量．

4．$\sigma\in L(V)$，$\lambda_1\cdots,\lambda_s$是$\sigma$（或$A$）的不同特征值，

$$\zeta_{i1},\zeta_{i2},\cdots,\zeta_{im_i}\qquad(i=1,2,\cdots,s)$$

是属于特征值λ_i的线性无关的特征向量组，则它们的并：

$$\zeta_{11},\cdots\zeta_{1m_1},\cdots,\zeta_{s1}\cdots\zeta_{sm_s}$$

仍线性无关．

5．$\sigma\in L(V)$，λ_0是σ的一个特征值，属于λ_0的所有特征

向量，再添上零向量，所组成的集合记为V_{λ_0}，它是V的子空间，称为特征子空间．V_{λ_0}是σ的不变子空间，$\dim V_{\lambda_0}$称为特征值λ_0的几何重数．

类似可定义方阵A的特征子空间$V_{\lambda_0}^*$．

（二） 答疑辅导

1．方阵（或线性变换）是否一定有特征值？

答 不一定，它与所讨论的数域有关，比如R是实数域，$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$，$|\lambda E-A|=\lambda^2+1$，在实数域上无根，故$A$在实数域$R$上无特征值．线性变换类似，若$V=L(\alpha_1,\alpha_2)$是实数域$R$上二维线性空间，

$$\sigma(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)A$$

由于σ与A具有相同特征值，而A无特征值，那么σ也没有特征值．

当然，如果在复数域K上讨论特征值，A是n级方阵，一定有n个特征值，线性变换也一样．

在一般数域上，n阶方阵的特征值可能是0个，1个，…，n个等几种情况．

2．特征子空间V_{λ_0}会不会只含有限个向量？

答 设λ_0是方阵A的特征值，那么$|\lambda_0E-A|=0$，从而$(\lambda_0E-A)X=0$就有非零解X_0，它是A的特征向量，即$X_0\in V_{\lambda_0}$．然而线性空间只有两类：或是$\{0\}$，或含无穷多个元．现在$X_0\neq 0$，且$X_0\in V_{\lambda_0}$，从而V_{λ_0}含无穷多个元．

我们指出：1）$0\in V_{\lambda_0}$，但0不是A的特征向量；2）若$X_1\in V_{\lambda_0}$，则$AX_1=\lambda_0X_1$．3）$X_1,X_2\in V_{\lambda_0}$，则X_1,X_2可能线性相关，也可能线性无关．但若λ_1,λ_2为A的两个不同特征值，且X_1,X_2分别是λ_1,λ_2相应的特征向量，则X_1,X_2一定线性无

关．特别$V_{\lambda_1}\cap V_{\lambda_2}=\{0\}$；4）对线性变换有类似的性质．

3．什么叫A的特征值的代数重数？它与几何重数有什么关系？

答　设A是n级方阵，若

$$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$

其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$互不相同，$r_i$是自然数$(i=1,2,\cdots s)$．则称$r_i$为特征值$\lambda_i$的代数重数．$\dim V_{\lambda_i}$为$\lambda_i$的几何重数．则

$$几何重数\leqslant代数重数．\qquad (1)$$

下面来证明（1）式．取n维线性空间V和它的一组基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$．作线性变换

$$\sigma(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A \qquad (2)$$

令$\dim V_{\lambda_1}=m$，取V_{λ_1}的一组基$\beta_1,\cdots,\beta_m$，并扩大为V的一组基$\beta_1,\cdots,\beta_m,\beta_{m+1},\cdots,\beta_n$．则

$$\begin{aligned}
&\sigma\beta_j=\lambda_1\beta_j \qquad (j=1,2,\cdots,m)\\
&\sigma\beta_{m+1}=k_{m+1,1}\beta_1\cdots+k_{m+1,n}\beta_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sigma\beta_n=k_{n1}\beta_1+\cdots+k_{nn}\beta_n.
\end{aligned}$$

那么σ在基$\beta_1,\cdots,\beta_n$下矩阵等于

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & k_{m+1,1} & \cdots & k_{n1}\\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & k_{m+1,m} & \cdots & k_{nm}\\ & & & & C & \end{pmatrix}.$$

从而

$$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=(\lambda-\lambda_1)^m|\lambda E-C|. \qquad (3)$$

这说明A的代数重数不小于m．类似可讨论$\lambda_2,\cdots,\lambda_s$．从而即证（1）式．

4．特征值有哪些主要等式？

答　设$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$n$级方阵$A=(a_{ij})$的全部特征值．

则

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

$$\operatorname{tr} A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

5. A 的特征值与 A 的零化多项式有什么关系？

答 我们可以证明：设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 n 级方阵 A 的全部特征值，若 $h(x)$ 是 A 的零化多项式，则

$$h(\lambda_i)=0. \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

这就是说，A 的特征值，可以从零化多项式的根中去找．事实上，设

$$h(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0, \tag{2}$$

$$h(A)=b_mA^m+bA_{m-1}A^{m-1}+\cdots+b_1A+b_0E=0. \tag{3}$$

设 λ_1 是 A 的特征值，α 为相应特征向量．在 (3) 式两端同乘 α，得

$$\begin{aligned}0&=(b_mA^m+\cdots+b_1A+b_0E)\alpha\\&=b_m\lambda_1^m\alpha+\cdots+b_1\lambda_1\alpha+b_0\\&=(b_m\lambda_1^m+\cdots+b_1\lambda_1+b_0)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad h(\lambda_1)=b_m\lambda_1^m+\cdots+b_1\lambda_1+b_0=0.$$

类似可证 $\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $h(x)$ 的根．

这样，我们证明了：在含方阵 A 的某代数方程中，比如设

$$b_mA^m+\cdots+b_1A+b_0E=c_sA^s+\cdots+c_1A+c_0E. \tag{4}$$

λ 是 A 的特征值，那么，(4) 式中 A 全部换成 λ 等式仍成立，即有

$$b_m\lambda^m+\cdots+b_1\lambda+b_0=c_s\lambda^s+\cdots+c_1\lambda+c_0 \tag{5}$$

我们常常可用此办法求出 A 的不同的特征值来．

显然，此命题之逆并不成立，即若A的某一特征值满足 (5) 式，将 λ 全部换成 A，并不一定成立．下面举一个例

子，设 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\lambda_1=\lambda_2=0$ 是 A 的特征值. 则 $\lambda=0$,若将 λ 换成 A，显然等式不能成立.

6. 已知 A 的特征值，怎样求 A 的矩阵多项式的特征值呢？

答 （日本京都大学研究生试题）设 n 级方阵 A 在复数域上全部特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 设

$$\varphi(x)=b_m x^m+\cdots+b_1 x+b_0$$

则 $\varphi(A)=b_m A^m+\cdots+b_1 A+b_0 E$ 的全部特征值为

$$\varphi(\lambda_1),\varphi(\lambda_2),\cdots,\varphi(\lambda_n). \tag{1}$$

事实上，由若当标准形知，存在可逆阵 P，使

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$$

则

$$A^k=P\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k\end{pmatrix}P^{-1},$$

其中 k 为正整数. 那么

$$\varphi(A)=P\left[b_m\begin{pmatrix}\lambda_1^m & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m\end{pmatrix}+\cdots+b_1\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}+b_0\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}\right]P^{-1}$$

$$\therefore \quad \varphi(A)=P\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}P^{-1}. \tag{2}$$

由于相似矩阵有相同特征值，由（2）式即证 $\varphi(A)$ 的全部特征值为（1）式.

上面命题也称为弗罗扁尼斯（Frobenius）定理.

7. 若 $B=P^{-1}AP$，它们有相同的特征值，那么它们的特征向量之间有无联系呢？

答 设 λ 是 A, B 的某一特征值，A 属于 λ 的特征子空间记为 V_1，B 属于 λ 的特征子空间记为 V_2. 则

$$V_2=\{P^{-1}\alpha \mid \alpha\in V_1\}. \tag{2}$$

事实上，令 $M=\{P^{-1}\alpha \mid \alpha\in V_1\}$，下证 $V_2=M$.

$\forall\ \beta\in V_2$，则 $B\beta=\lambda\beta$，$(P^{-1}AP)\beta=\lambda\beta$，

$$A(P\beta)=\lambda(P\beta),\ P\beta\in V_1.$$

令 $\alpha=P\beta\in V_1$，则 $\beta=P^{-1}\alpha\in M$，此即 $V_2\subseteq M$.

反之，$\forall P^{-1}\alpha\in M$，其中 $\alpha\in V_1$，则

$A\alpha=\lambda\alpha$，$(P^{-1}AP)(P^{-1}\alpha)=\lambda(P^{-1}\alpha)$，$B(P^{-1}\alpha)=\lambda(P^{-1}\alpha)$. 故 $P^{-1}\alpha\in V_2$. 此即 $M\subseteq V_2$，从而得证 (1) 式.

由 (1) 式可知 $\dim V_1=\dim V_2$. 事实上，设 $\dim V_1=m$，且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 V_1 的一组基. 则 V_2 中向量组

$$P^{-1}\alpha_1,\cdots,P^{-1}\alpha_m \tag{1}$$

也线性无关，这样 $\dim V_2\geqslant\dim V_1$. 由相似的对称性，可证 $\dim V_1\geqslant\dim V_2$. 故 $\dim V_1=\dim V_2$.

这就证明了：若 $A\sim B$，则它们相同特征值的特征子空间维数相等，而且若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 V_1 的一组基，则 (2) 式就是 V_2 的一组基.

(三) 题型归类

1. 求一已知方阵或线性变换的特征值和特征向量.

例 1 分别在有理数域和实数域中求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

解 先求 A 的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -6 & 3\\ 1 & \lambda & -1\\ -1 & -2 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-2)$$

由此可知，在有理数域中 A 只有一个特征值 $\lambda=2$. 属于特征值2的特征向量为 $k(2,-1,0)'$，其中 k 为不等于零的有理数；

在实数域中 A 的特征值有3个：$\lambda_1=2$，$\lambda_2=1-\sqrt{3}$，$\lambda_3=1+\sqrt{3}$. 可以求出分别属于以上3个特征值的特征向量为：$k(2,-1,0)'$, $l(3,-1,2+\sqrt{3})'$, $m(3,-1,2-\sqrt{3})'$，其中 k、l、m 均为不等于零的实数.

2. 求特征子空间

例 2 设 n 阶 $A=(a_{ij})$，其中 $a_{ij}=a\neq0$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$. 求 A 的特征值与其相应的特征子空间.

解
$$|\lambda E-A|=\lambda^{n-1}(\lambda-na). \tag{1}$$

A 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$，$\lambda_n=na$.

设相应的特征子空间为 V_{na} 和 V_0.

由特征值 $\lambda=na$，求出线性无关特征向量为

$$\alpha_1=(1,1,\cdots,1)'$$

$$\therefore \quad V_{na}=L(\alpha_1)$$

由特征值 $\lambda=0$，求出线性无关特征向量为

$$\begin{aligned}\alpha_2&=(1,\ -1,\ 0,\ \cdots\ 0)\\ \alpha_3&=(1,\ 0,\ -1,\ \cdots\ 0)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_n&=(1,\ 0,\ 0,\ \cdots\ -1)\end{aligned}$$

$V_0=L(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为 $n-1$维.

3. 与 A 相关的一些矩阵的特征值

1）A 与 A^{-1} 的特征值

例 3 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值，证明 $\frac{1}{\lambda_1},\cdots$ $\frac{1}{\lambda_n}$ 是 A^{-1} 的全部特征值．且它们具有相同的特征向量．

证 设 λ_1 相应特征向量为 α，则

$$A\alpha=\lambda_1\alpha \tag{1}$$

由于 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，而 A 可逆，$\lambda_i\neq0$．从而用 $\frac{1}{\lambda_1}A^{-1}$ 左乘（1）式两端得

$$\frac{1}{\lambda_1}\alpha=A^{-1}\alpha$$

故 $\frac{1}{\lambda_1}$ 为 A^{-1} 的特征值，α 为 A^{-1} 相应的特征向量．类似可讨论 $\lambda_2,\cdots,\lambda_n$．

2）方阵 A 与 A' 的特征值

例 4 （东北师大研究生入学试题）证明 A 与 A' 相似，从而有相同的特征值．但特征向量不一定相同．

证 设 $\lambda E-A$ 的不变因子为 $d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$，则存在可逆阵 $P(\lambda),Q(\lambda)$，使得

$$P(\lambda))(\lambda E-A)Q(\lambda)=\mathrm{diag}(d_1(x),\cdots,d_n(\lambda))$$

两边取转量后

$$Q'(\lambda)(\lambda E-A')P'(\lambda)=\mathrm{diag}(d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda))$$

从而 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-A'$ 有相同不变因子，因此 A 与 A' 相似．从而有相同的特征多项式，有相同特征值．

但特征向量不一定相同．比如 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，求得 A（或 A'）的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$．A 的属于1的线性无关的特征向量为 $\alpha=(1,0)'$ 而 A' 属于1的线性无关特征向量为 $\beta=(0,1)'$．显然两者特征向量是不同的．

3) A 与A^* 的特征值

例 5 设 A 为 n 级方阵，在复数域中求 A^k 和 A^* 的全部特征值（k 为自然数）

解 设 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则 A^k 的特征值为 $\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k$.

再求 A^* 的特征值（华中理工大学，新乡师院研究生入学试题）.

当$|A|\neq 0$时，由于 $AA^*=|A|E$，$A^*=|A|A^{-1}$，故 A^* 的全部特征值为

$|A|\lambda_1^{-1}=\lambda_2\cdots\lambda_n$，$|A|\lambda_2^{-1}, \cdots, |A|\lambda_n^{-1}$.

再若$|A|=0$时，秩 $(A^*)\leqslant 1$.

当秩 $(A^*)=0$，$A^*=0$时，A^* 的特征值全为0.

当秩 $(A^*)=1$时，设

$$|\lambda E-A^*|=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+b_2\lambda^{n-2}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n$$

其中 $b_j=(-1)^j$(A^* 中一切 j 级主子式之和）。由于秩 $(A^*)=1$,

$\therefore$ $b_j=0$ $(j\geqslant 2)$，$b_1=-(A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn})$

其中 $A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{nn}$ 为$|A|$的代数余子式，所以

$$\begin{aligned}|\lambda E-A^*|&=\lambda^n-(A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn})\lambda^{n-1}\\&=\lambda^{n-1}[\lambda-(A_{11}+\cdots+A_{nn})]\end{aligned}$$

故 A^* 的特征值为$0, \cdots, 0$和 $A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$.

4. Sylvester 公式

例 6 (Sylvester) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵 $(m\geqslant n)$. 证明

$$|\lambda E-AB|=\lambda^{m-n}|\lambda E-BA| \qquad (1)$$

证 当 $m=n$ 时，则

$$\begin{pmatrix}0 & E\\ E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & B\\ A & \lambda E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & E\\ E & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda E & A\\ B & E\end{pmatrix},$$

两边取行列式，即有

$$|\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|.$$

即当 $m=n$ 时，有(1)式成立.

当 $m>n$ 时，令

$$B_1=\begin{pmatrix}B\\ 0\end{pmatrix}_{m\times m}, \quad A_1=(A, 0)_{m\times m}.$$

由上面证明知有

$$|\lambda E-A_1B_1|=|\lambda E-B_1A_1| \tag{2}$$

但是

$$A_1B_1=(A, 0)\begin{pmatrix}B\\ 0\end{pmatrix}=AB, \tag{3}$$

$$B_1A_1=\begin{pmatrix}B\\ 0\end{pmatrix}(A \quad 0)=\begin{pmatrix}BA & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{4}$$

由(3)，(4)有

$$|\lambda E-A_1B_1|=|\lambda E-AB|, \tag{5}$$

$$|\lambda E-B_1A_1|=\lambda^{m-n}|\lambda E-BA|. \tag{6}$$

将(5)，(6)两式代入(2)式，即证(1)式.

例 7 证明：$\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}BA$

证 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，设 AB 的全部特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$，$BA$ 的全部特征值为 $\mu_1,\cdots,\mu_n$，由于

$$\mathrm{tr}AB=\lambda_1+\cdots+\lambda_m, \tag{1}$$

$$\mathrm{tr}BA=\mu_1+\cdots+\mu_n. \tag{2}$$

但是，由 Sylvester 公式知 AB 与 BA 有相同的非零特征值. 它们之区别仅在零特征值的重数不同. 再由(1)，(2)两式知

$$\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}BA.$$

5. 特殊阵的特征值

例 8 （新疆大学，辽宁大学研究生入学试题） 求证 A 为幂零矩阵的充要条件是 A 的特征值全为0.

证 见p.98第三章§5答疑辅导2.

例 9 幂等阵的特征值只能是0或1

证 设 A 是幂等阵，则 $A^2=A$，λ 是 A 的任一特征值，则 $\lambda^2=\lambda$，所以 $\lambda=0$ 或 1.

例 10 幂幺阵的特征值只能是单位根.

证 设 A 是幂幺阵，则存在正整数 m，使 $A^m=E$. λ 是 A 的任一特征值，则 $\lambda^m=1$，故 λ 是 m 次单位根.

例 11 （东北工学院研究生入学试题） 酉矩阵(或正交阵)的特征根的模等于1.（南开大学研究生入学试题：正交阵的实特征值只能是1或-1）

证 设 λ 为酉矩阵 A 的任一特征值，α 为其相应的特征向量，则 $A\alpha=\lambda\alpha$. 两边取转置共轭有

$$\overline{\alpha}'\overline{A}'=\overline{\lambda}\overline{\alpha}'.$$

两式相乘，并注意 $\overline{A}'A=E$，则

$$\overline{\alpha}'\alpha=(\overline{\lambda}\lambda)\overline{\alpha}'\alpha=|\lambda|^2\overline{\alpha}'\alpha$$

消去 $\overline{\alpha}'\alpha$，那么有 $|\lambda|^2=1$，所以 $|\lambda|=1$.

例 12 设 n 级循环阵

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

令 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$. 则 A 的全部特征值为

$$f(\varepsilon_1),\ f(\varepsilon_2),\ \cdots,\ f(\varepsilon_n). \qquad (1)$$

其中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为全部 n 次单位根.

证 p.102见第三章 §5 答疑辅导 5.

例 13 （四川大学，华东师大研究生入学试题）实反对称阵的特征值只能是 0 或纯虚数.

证 设 λ 为实反对称阵 A 的任一特征值，其相应特征向量为 α，则 $A\alpha=\lambda\alpha$. 由 A 为实反对称阵，那么 $-\bar{A}'=A$. 故

$$\alpha'A\alpha=-\alpha'\bar{A}'\alpha=-(\bar{A}\bar{\alpha})'\alpha=-\bar{\lambda}(\bar{\alpha})'\alpha.$$

$$\bar{\alpha}'A\alpha=\lambda\bar{\alpha}'\alpha$$

$\therefore\quad \lambda=-\bar{\lambda}\qquad$ 即证：$\lambda=bi$.

§3 最小多项式

（一）答疑辅导

1. 什么叫方阵 A 的最小多项式？

答 $A\in P^{n\times n}$，若存在 A 的首项系数为 1 的零化多项式 $g(x)\in P[x]$，且对于 A 的任意零化多项式 $\varphi(x)\in P[x]$，都有 $\partial g(x)\leqslant\partial\varphi(x)$. 则称 $g(x)$ 为 A 的最小多项式.

2. 最小多项式与零化多项式有什么关系？

答 设 $g(x)$ 是 A 的最小多项式，$\varphi(x)$ 是 A 的零化多项式，则 $g(x)\mid\varphi(x)$，事实上，若

$$\varphi(x)=q(x)g(x)+r(x),\tag{1}$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\partial r(x)<\partial g(x)$. 由于

$$0=\varphi(A)=q(A)g(A)+r(A)=r(A).$$

由最小多项式定义，必须 $r(x)=0$，所以 $g(x)\mid\varphi(x)$.

3. 最小多项式是否唯一？

答 唯一，设 $g_1(x)$，$g_2(x)$分别为 A 的两个最小多项式. 则由上面可知 $g_1(x)$与 $g_2(x)$可以互相整除，所以 $g_1(x)$

$=cg_2(x)$. 但最小多项式首项系数为 1, 故 $c=1$, 从而 $g_1(x)=g_2(x)$.

4. 最小多项式是否存在?

答 存在. 因为设 n 阶方阵 A 的最小多项式为 $g(\lambda)$, 又 $\lambda E-A$ 的 n 个不变因子为 $d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$. 则 $g(\lambda)=d_n(\lambda)$. (中山大学研究生入学试题) 证明分下面几步进行.

(1) 设 $J=\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}_{m\times m}$ 为 m 阶若当块, $\varphi(\lambda)$ 是 J 的最小多项式. 令 $f(\lambda)=|\lambda E-J|=(\lambda-a)^m$. 由凯莱定理知 $f(\lambda)$ 为 J 的零化多项式. 从而 $\varphi(\lambda)|f(\lambda)$. 设 $\varphi(\lambda)=(\lambda-a)^t$, 其中 $t\leqslant m$.

当 $t<m$ 时, 令 $h(\lambda)=(\lambda-a)^t$, 但 $h(J)\neq 0$. 故证 $\varphi(\lambda)=(\lambda-a)^m$.

这就是说: 若当块的最小多项式为一次式之幂, 其幂指数为若当块矩阵之阶, 一次式 $x-a$ 以若当块主对角线元为根.

(2) 设 $B=\mathrm{diag}(B_1, B_2, \cdots, B_m)$ 为准对角阵. $g_1(\lambda),\cdots,g_m(\lambda)$ 分别为 $B_1,\cdots,B_m$ 的最小多项式, $\varphi(\lambda)$ 为 B 的最小多项式. 则

$$\varphi(\lambda)=[g_1(\lambda),\ g_2(\lambda),\ \cdots,\ g_m(\lambda)], \tag{1}$$

(1) 式右端表示是它们的最小公倍式的记号.

显然, 我们只要对 $m=2$ 进行证明即可 (福州大学研究生入学试题). 即 $B=\mathrm{diag}(B_1, B_2)$, 下证

$$\varphi(\lambda)=[g_1(\lambda),\ g_2(\lambda)]. \tag{2}$$

由于 $\varphi(\lambda)$ 为 B 的最小多项式, 当然是 B 的零化多项式, 所以

$$0=\varphi(B)=\begin{pmatrix} \varphi(B_1) & \\ & \varphi(B_2) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(B_1)=0,\ \varphi(B_2)=0$$

证得 $\varphi(\lambda)$分别为 B_1 与 B_2 的零化多项式

$$\therefore \qquad g_1(\lambda)|\varphi(\lambda),\ g_2(\lambda)|\varphi(\lambda).$$

$\varphi(\lambda)$就是 $g_1(\lambda)$与 $g_2(\lambda)$的公倍式.

其次,设 $h(\lambda)$为 $g_1(\lambda)$与 $g_2(\lambda)$的任一公倍式.则 $h(B_1)=0$, $h(B_2)=0$, 且

$$h(B)=\begin{pmatrix} h(B_1) & \\ & h(B_2)\end{pmatrix}=0.$$

这样, $h(\lambda)$为 B 的零化多项式, 所以 $\varphi(\lambda)|h(\lambda)$. 从而得证

$$\varphi(\lambda)=[g_1(\lambda),\ g_2(\lambda)].$$

(3) 相似矩阵有相同的最小多项式.

设 $B\sim C$, $g_1(\lambda)$, $g_2(\lambda)$ 分别为 B 与 C 的最小多项式. 下证 $g_1(\lambda)=g_2(\lambda)$. 事实上, 设 $B=X^{-1}AX$.

$$0=g_2(B)=X^{-1}g_2(A)X,\ \therefore\ g_2(A)=0$$

所以 $g_1(\lambda)|g_2(\lambda)$. 类似可证 $g_2(\lambda)|g_1(\lambda)$. 所以有 $g_1(\lambda)=g_2(\lambda)$.

(4) 最后证明 $g(\lambda)=d_n(\lambda)$.

设 A 的全部初等因子为:

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_{11}},\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{n_{1r_1}}\quad n_{11}\leqslant\cdots\leqslant n_{1r_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\lambda-\lambda_s)^{n_{s1}},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_{sr_s}}\quad n_{s1}\leqslant\cdots\leqslant n_{sr_s}$$

则 $\qquad d_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_{1r_1}}(\lambda-\lambda_2)^{n_{2r_2}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_{sr_s}}$.

另一方面, 由若当标准形知 $A\sim J$, 其中

$$J=\begin{pmatrix} J_{1n_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{sn_{sr_s}}\end{pmatrix}$$

$$J_{ij}=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{j\times j}\quad (i=1,2,\cdots s,\ \ j=1,2,\cdots n_i r_i)$$

设 $g_{ij}(\lambda)$为若当块 J_{ij} 的最小多项式，则 $g_{ij}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^j$. 再由于 A 与 J 有相同的最小多项式，所以

$$g(\lambda)=[(\lambda-\lambda_1)^{n_{11}},\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{n_{1r_1}},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_{s1}},\ \cdots,$$
$$(\lambda-\lambda_s)^{n_{sr_s}}]=(\lambda-\lambda_1)^{n_{1r_1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_{sr_s}}$$
$$=d_n(\lambda).$$

5. 最小多项式与特征多项式有什么关系？

答　设 A 的最小多项式为 $g(\lambda)$，特征多项式为 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$. 则

(1) $g(\lambda)|f(\lambda)$,

(2) $|\lambda E-A|=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$.

事实上，$\lambda E-A$ 的标准形为 $\mathrm{diag}(d_1(\lambda),\cdots,d_n(\lambda))$. 则两边取行列式，可证得(2). 从(2)，再由于 $d_n(\lambda)=g(\lambda)$，也可得出(1).

(3) 设 A 的不同特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，$d_n(\lambda)$ 的不同根的集也一定是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，反之亦然. 这就是说，$|\lambda E-A|$ 与 $d_n(\lambda)$具有相同的根集，仅只重数不同而已. 证明由 (2) 可得，只要注意

$$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)\quad (i=1,2\cdots,n-1)$$

即可.

（二）题型归类

1. 求最小多项式

(1) 直接求 $d_n(\lambda)$.

例 1　(武汉大学研究生入学试题)求

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

的最小多项式.

解

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & \lambda+1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & \lambda-1 & 0\\ -2 & -2 & -2 & \lambda\end{pmatrix}$$

用初等变换法，可求出不变因子为$1,1,\lambda,\lambda^2(\lambda-1)$. 所以$A$的最小多项式

$$g(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1).$$

(2) 借助于特征多项式

例 2 求

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -4 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

的最小多项式.

解 $|\lambda E-A|=\lambda^3$. 设$g(\lambda)$为A的最小多项式，那么$g(\lambda)$整除λ^3，因此只有3种可能，或等于λ，或等对λ^2，或等于λ^3，经验算因为$A^2=0$，故$g(\lambda)=\lambda^2$.

2. 求A的零化多项式

例 3 (大连理工大学研究生入学试题)设

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

求 A 的全体零化多项式集.

解 先可证 $A^3=4A$. 即 x^3-4x 为 A 的零化多项式. 最小多项式必为它的因式. 设 $g(x)$为 A 的最小多项式, 经验算可得

$$g(x)=x^2-2x.$$

设 M 为 A 的零化多项式集, 则

$$M=\{h(x)(x^2-2x)\mid h(x)\in P[x]\}.$$

§4 综合题

例 1 (Gerschgorin) 设 n 级复方阵 $A=(a_{ij})$, λ 是 A 的任一特征值, 则 $\lambda\in D_1\cap D_2$, 其中

$$D_1=\bigcup_{i=1}^{n}B_i(A),\quad D_2=\bigcup_{i=1}^{n}B_i(A'),$$

$$B_i(A)=\{Z\mid |Z-a_{ii}|\leqslant R_i,\ R_i=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\}.$$

证 设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)'$ 为特征值 λ 的特征向量, 由 $A\alpha=\lambda\alpha$, 得

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha=\lambda\alpha,\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

$$\therefore\quad \sum_{j\neq i}a_{ij}\alpha_j=(\lambda-a_{ii})\alpha_j,\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

设 $|\alpha_k|=\max\{|\alpha_1|,\cdots,|\alpha_n|\}$. 则$|\alpha_k|\neq 0$, 且

$$|\lambda-a_{kk}|\leqslant\sum_{j\neq k}|a_{ij}|\frac{|\alpha_j|}{|\alpha_k|}\leqslant R_k.$$

$$\therefore\quad \lambda\in B_k(A)\subseteq D_1.$$

类似可证 $\lambda\in D_2$, 从而 $\lambda\in D_1\cap D_2$.

注 例 1 也称为圆盘定理.

例2 (南京大学研究生入学试题) 设 $f(\lambda)$为 λ 的复系数多项式, n 阶复数矩阵 A 的特征值都不是 $f(\lambda)$ 的零点. 试

证：$f(A)$ 为可逆矩阵，且 $f(A)$ 的逆矩阵可表为 A 的多项式．

证 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部特征值，那么 $f(\lambda_1)$，$f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$为 $f(A)$的全部特征值．由条件知 $f(\lambda_i) \neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$．所以

$$|f(A)|=f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n) \neq 0.$$

故 $f(A)$可逆．

再设 A 的最小多项式为 $g(\lambda)$．由条件知，λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$是 $g(\lambda)$的根，但不是 $f(\lambda)$的根．从而有

$$(g(\lambda), f(\lambda))=1.$$

存在 $u(\lambda)$、$v(\lambda)$使

$$u(\lambda)g(\lambda)+v(\lambda)f(\lambda)=1.$$

那么

$$u(A)g(A)+v(A)f(A)=v(A)f(A)=E.$$

$$\therefore \qquad f(A)^{-1}=v(A).$$

例3 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 1，-1，2，若 $B=A^3-5A^2$．试求

1) B 的特征值及其相似的对角阵；

2) $|B|$和$|A-5E|$；

3) B 的最小多项式 $g(\lambda)$．

解 1) 由p.196本章§2答疑辅导 6 知 B 的 3 个特征值为

$1^3-5\cdot1^2=-4$，$\quad(-1)^3-5(-1)^2=-6$，$\quad2^3-5\cdot2^2=-12$．

由于 B 有 3 个不同特征值，从而 B 与对角阵 $\mathrm{diag}(-4,-6,-12)$ 相似．

2) $|B|=(-4)\cdot(-6)\cdot(-12)=-288$

$$|B|=|A^2(A-5E)|,\quad |A|=1\cdot(-1)\cdot2=-2,$$

$\therefore \quad |A-5E|=-288/(-2)^2=-72.$

3) $B\sim \text{diag}(-4,-6,-12)$，相似矩阵有相同的最小多项式，$\text{diag}(-4,-6,-12)$的不变因子为 $1,1,(\lambda+4)(\lambda+6)(\lambda+12)$，从而

$$g(\lambda)=(\lambda+4)(\lambda+6)(\lambda+12).$$

例 4 （山东大学，湘潭大学研究生入学试题） 设 $A=(a_1,\cdots,a_n)$，求 $A'A$ 的特征根.

解 由 Sylvester 公式

$$|\lambda E-A'A|=\lambda^{n-1}|\lambda E-AA'|,\quad AA'=\sum_{i=1}^{n}a_i^2,$$

故 $A'A$ 的 n 个特征根为

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\quad \lambda_n=\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

例5 （同济大学研究生入学试题） 设 A 是 n 阶方阵，$\varphi(\lambda)$是一多项式，则 A 的特征向量都是 $\varphi(A)$的特征向量.

证 设 α 是 A 的任一特征向量，其相应特征值为 λ，则 $A\alpha=\lambda\alpha$. 令

$$\varphi(x)=b_m x^m+\cdots+b_1x+b_0,$$

$$\therefore \quad \varphi(A)\alpha=(b_m\lambda^m+\cdots+b_1\lambda+b_0)\alpha=\varphi(\lambda)\alpha,$$

即证 α 为 $\varphi(A)$的属于特征值 $\varphi(\lambda)$的一个特征向量.

例6 设 A 为 n 级复方阵，求证存在 n 维列向量 α，使 $\alpha, A\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$ 线性无关的充要条件是 A 的每一特征根恰有一个线性无关的特征向量.

证 设 $\alpha, A\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$ 线性无关，从而为 $K^{n\times 1}$ 的一组基，其中 K 为复数域.

设 λ 为 A 的任一特征根，β 为其相应特征向量，则

$$\beta=x_0\alpha+x_1(A\alpha)+\cdots+x_{n-1}(A^{n-1}\alpha)$$

$$A\beta=x_0(A\alpha)+x_1(A^2\alpha)+\cdots+x_{n-2}(A^{n-1}\alpha)+x_{n-1}(A^n\alpha)$$

令 $A^n\alpha=b_0\alpha+b_1(A\alpha)+\cdots+b_{n-1}(A^{n-1}\alpha)$，那么，由 $A\beta=\lambda\beta$ 得

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & & -b_0 \\ & \lambda & & & -b_0 \\ -1 & & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & \lambda & -b_{n-2} \\ & & & -1 & \lambda-b_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

由于方程（1）的系数矩阵秩等于 $n-1$，故只有一个线性无关解．从而 λ 只有一个线性无关的特征向量．

反之，设 A 的每个特征值恰有一个线性无关的特征向量，再设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为 A 的全部不同特征值，由于每个若当块对应一个线性无关特征向量．从而对每个 λ_j 恰有一个若当块，从而 A 的全部初等因子为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{r_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$

则 A 的最小多项式

$$\begin{aligned} d_n(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}=|\lambda E-A| \\ &=\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_0 \end{aligned}$$

A 的不变因子为 $1,\cdots,1,d_n(\lambda)$．

$$令\ B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -b_0 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix},$$

B 的不变因子也是 $1,\cdots,1,d_n(\lambda)$ 从而 $A\sim B$．即存在可逆阵 $T=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，使 $T^{-1}AT=B$．由

$$A(\alpha_1\cdots\alpha_n)=AT=TB=(\alpha_1\cdots\alpha_n)B$$

可得

$$\alpha_1,\ A\alpha_1=\alpha_2,\ \cdots,\ A^{n-1}\alpha_1=\alpha_n$$

是线性无关的．

例7 （华中理工大学研究生入学试题） 设 A, B 分别是复数域上 m 阶和 n 阶方阵，且 A, B 没有公共特征值，证明：方程 $AX=XB$ 只有唯一零解.

证 设 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$，$B$ 的为 $\mu_1, \cdots, \mu_n$. 则

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_m), \tag{1}$$

$$f(B)=(B-\lambda_1 E)\cdots(B-\lambda_m E), \tag{2}$$

$$|f(B)|=|B-\lambda_1 E|\cdots|B-\lambda_m E|. \tag{3}$$

下证

$$|B-\lambda_i E|=\prod_{j=1}^{n}(\mu_j-\lambda_i). \tag{4}$$

事实上，由若当标准形知，存在可逆阵 T，使

$$B=T^{-1}\begin{pmatrix}\mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n\end{pmatrix}T,$$

所以

$$B-\lambda_i E=T^{-1}\begin{pmatrix}\mu_1-\lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n-\lambda_i\end{pmatrix}T$$

两边取行列式即证 (4)式. 再由 (3)式及 $\lambda_i \neq \mu_j$ 知 $|f(B)| \neq 0$，从而 $f(B)$可逆.

其次，由 $AX=XB$，可证得 $A^k X=XB^k (k=1,2,\cdots)$ 这样可得 $\qquad f(A)X=Xf(B)$,

由凯莱定理知 $f(A)=0$,

$\therefore \quad Xf(B)=0$，即 $X=0$.

例8 （第三届全国大学生夏令营试题） 设 A 为 n 阶方阵，

$$g(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-\mu_1)^{r_1}(\lambda-\mu_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\mu_s)^{r_s}, \quad (1)$$
其中 $\mu_1,\cdots,\mu_s$ 为不同复数．试证：存在多项式 $f(\lambda)$，使得对任意 j 有

$$(\lambda-\mu_j)^{r_j}|(f(\lambda)-\mu_j). \quad (2)$$

并以此证明：$f(A)$ 相似于对角方阵，而 $f(A)-A$ 为幂零阵．

证 1) 令

$$g_i(\lambda)=\frac{g(\lambda)}{(\lambda-\mu_j)^{r_j}}, \quad (i=1,2,\cdots,s) \quad (3)$$

由于 $g_1(\lambda),\cdots,g_s(\lambda)$ 互素，从而存在多项式 $\varphi_i(\lambda)$，使得

$$\varphi_1(\lambda)g_1(\lambda)+\cdots+\varphi_s(\lambda)g_s(\lambda)=1. \quad (4)$$

令

$$f(\lambda)=\mu_1\varphi_1(\lambda)g_1(\lambda)+\cdots+\mu_s\varphi_s(\lambda)g_s(\lambda). \quad (5)$$

则由(5) $-\mu_j\times$ (4)得

$$f(\lambda)-\mu_j=\sum_{i\neq j}(\mu_i-\mu_j)\varphi_i(\lambda)g_i(\lambda) \quad (6)$$

因为

$$(\lambda-\mu_j)^{r_j}|g_i(\lambda), \quad (i\neq j),$$

$$\therefore \quad (\lambda-\mu_j)^{r_j}|(f(\lambda)-\mu_j). \quad (7)$$

2) 取 n 维线性空间 V 和它的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$．作线性变换

$$\sigma(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A. \quad (8)$$

则 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_s$，其中

$$V_k=\ker[(\sigma-\mu_k I_V)^{r_k}],$$
$$\dim V_k=r_k, \quad (k=1,2,\cdots,s).$$

取 V_k 的一组基

$$\beta_{k1},\cdots,\beta_{kr_k} \quad (k=1,2,\cdots,s)$$

则它们之并

$$\beta_{11},\cdots,\beta_{1r_1},\cdots,\beta_{s1},\cdots,\beta_{sr_s} \qquad (9)$$

为 V 的一组基. 由（7）式有

$$f(\lambda)-\mu_j=q_j(\lambda)(\lambda-\mu_j)^{r_j}, \quad (j=1,2,\cdots s) \qquad (10)$$

$$f(\sigma)-\mu_j I_V=q_j(\sigma)(\sigma-\mu_j I_V)^{r_j} \quad (j=1,2,\cdots s)$$

$$(f(\sigma)-\mu_j I_V)\beta_{jk}=q_j(\sigma)(\sigma-\mu_j I_V)^{r_j}\beta_{jk}=0,$$

$$\therefore\ f(\sigma)\beta_{jk}=\mu_j\beta_{jk}, (j=1,2,\cdots s,\ k=1,2,\cdots r_j) \qquad (11)$$

由(11)式知 $f(\sigma)$在基（9）之下的矩阵为对角阵

$$\mathrm{diag}(\mu_1 E_{r_1},\cdots,\mu_s E_{r_s}) \qquad (12)$$

其中 E_{r_k} 为 r_k 级单位阵. 由于 $f(\sigma)$ 在某组基下为对角阵，故 $f(A)$相似于对角阵.

3) 因为 V_k 为 σ 的根子空间，故 σ 在基（9）之下的矩阵为上三角阵

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & * \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mu_s & \\ 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & \mu_s \end{pmatrix} \qquad (12)$$

由(12),(12)两式知 $f(\sigma)-\sigma$ 在基（9）之下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & * \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

此即证 $f(A)-A$ 的特征值全为0.

4) 最后证明特征值为 0 的方阵一定是幂零阵. 从而得证 $f(A)-A$ 为幂零阵.

设 $B=f(A)-A$ 的特征值全为 0，则由若当标准形知

$$B \sim J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_t \end{pmatrix} \tag{14}$$

其中

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n_k \times n_k}$$

由于 $J_k^{n_k}=0$，$(k=1,2,\cdots t)$.所以存在自然数 N，使 $J^N=0$.

但 $B=T^{-1}JT$，故 $B^N=T^{-1}J^NT=0$.

例9 （日本东京大学研究生入学试题） 设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & a \\ a & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 a,b 是实数 $a\neq 0$，$b\neq 0$，$|a|\neq|b|$.

1）试求 A 的特征值以及长度为 1 的特征矢量；

2）当 n 为正整数时，试求

$$(1,0,0,0)A^n(1,0,0,0)'.$$

解 1）$|\lambda E-A|=[(\lambda-a)^2-b^2][(\lambda+a)^2-b^2]$，因此 A 的特征值

$$\lambda_1=a+b，\ \lambda_2=a-b，\ \lambda_3=-a+b，\ \lambda_4=-a-b.$$

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 的长度为 1 的特征矢量分别为 $\alpha_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)'$，$\alpha_2=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)'$，$\alpha_3=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)'$，$\alpha_4=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)'$.

2）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，则

$$P^{-1}AP=\text{diag}(a+b,a-b,-a+b,-a-b)$$

$$P^{-1}A^nP=\text{diag}((a+b)^n,(a-b)^n,(-a+b)^n,(-a-b)^n)$$

$$\therefore\ A^n=P\text{diag}((a+b)^n,(a-b)^n,(-a+b)^n,(-a-b)^n)P^{-1}$$

$$(1,0,0,0)A^n(1,0,0,0)'$$

$$=\frac{1}{4}\left[(a+b)^n+(a-b)^n+(-a+b)^n+(-a-b)^n\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[(a+b)^{2m}+(a-b)^{2m}\right] & \text{当 } n=2m \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } n=2m-1 \text{ 时.}\end{cases}$$

例10 （日本东京大学研究生入学试题） 在 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 中，当 $a_{ij}>0$，$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=1$ $(i=1,2,\cdots n)$ 时，试回答下列各题：

1）证明 A 的特征值有一个是 1；

2）当 $B_m=A^m$（m 是正整数）时，对于 A 为 $n=2$的情况，求 $\lim\limits_{m\to\infty}B_m$.

解 1）设 $\alpha=(1,1,\cdots,1)'$ 则 $A\alpha=1\cdot\alpha$，因此 A 有特征值 1.

2）$n=2$ 时，由 $a_{ij}>0$ 及 $\sum a_{ij}=1$，故可设

$$A=\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}\quad(0<a<1,\ 0<b<1)$$

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-1+a+b)$$

因此 A 有特征值 1 和 $1-a-b$，其中 $-1<1-a-b<1$.

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}=(1-a-b)\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A^m\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad A^m\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}=(1-a-b)^m\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}$$

$$A^m\begin{pmatrix}1 & a\\1 & -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & (1-a-b)^m a\\1 & -(1-a-b)^m b\end{pmatrix}$$

$$B_m=A^m=\begin{pmatrix}1 & (1-a-b)^m a\\1 & -(1-a-b)^m b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\1 & -b\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=-\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}1 & (1-a-b)^m a\\1 & -(1-a-b)^m b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b & -a\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

因为$\lim\limits_{m\to\infty}(1-a-b)^m=0$，所以

$$\lim_{m\to\infty}B_m=-\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-b & -a\\-1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & a\\b & a\end{pmatrix}.$$

第七章 二 次 型

§1 定义与标准形

（一）内容提要

1．设A，$B\in P^{n\times n}$，如果存在可逆阵$T\in P^{n\times n}$使得$B=T'AT$，称A与B合同．合同关系满足反身性、对称性与传递性，即合同关系是等价关系．因此可利用合同关系对$P^{n\times n}$中矩阵进行分类。

2．设P是数域，n个文字的二次型有两种表示法：一种为代数表示法，一种为矩阵表示法，

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\quad a_{ij}\in P \tag{1}$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX,\quad A'=A\in P^{n\times n} \tag{2}$$

其中$X'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$A=(a_{ij})_{n\times n}=A'$．

设n个文字的所有二次型所成集合为M_n，$P^{n\times n}$中一切对称阵所成集合为S_n，则它们之间是一一对应的．因此二次型的问题可以转化为对称阵来研究．反之，对称阵问题也可转化为二次型来研究．

3．$A\in S_n$，则A合同于对角阵$\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，且$d_1,\cdots,d_n$中不为零的个数等于秩（$A$）．

上面命题用二次型语言述叙为：$X'AX\in M_n$，则存在可逆变换$X=CY$，使

$$X'AX=Y'\mathrm{diag}(d_1\cdots d_n)Y=d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2 \tag{3}$$

其中 $X'=(x_1,\cdots,x_n)$，$Y'=(y_1,\cdots,y_n)$，$C\in P^{n\times n}$，$d_1,\cdots,d_n$ 中不为零的个数等于秩（A）.

4．$f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX\in M_n$，称秩$(A)$为 f 的秩.

（二）答疑辅导

1．设 $X'AX$，$X'BX$，$Y'CY\in M_n$，$X'AX=X'BX=Y'CY$ 的条件是什么？其中 $X'=(x_1,\cdots,x_n)$，$Y'=(y_1,\cdots,y_n)$.

答　$X'AX=X'BX\Longleftrightarrow A=B$.

$X'AX=Y'CY\Longleftrightarrow A$与$C$合同.

2．化二次型为标准形，为什么一定要用可逆（或称非退化）变换？

答　代数在某种意义下是研究不变性的，比如矩阵经初等变换，秩不变．对线性方程组的增广矩阵作行初等变换，所得到的线性方程组的解不变等等.

化二次型为标准形，用可逆变换，也是为了保证变换前后两个二次型的秩不变，或者还有一些其它的性质不变．比如实二次型还会保持各种惯性指数不变，正（或负）定性，半正（或半负）定性不变等等.

3．二次型的标准形是否唯一？

答　不是唯一的．比如 $f(x_1,x_2)=x_1x_2$，令 $x_1=y_1+y_2$，$x_2=y_1-y_2$，则 $f(x_1,x_2)=y_1^2-y_2^2$

再令 $x_1=y_1+2y_2$，$x_2=y_1-2y_2$ 则 $f(x_1,x_2)=y_1^2-4y_2^2$，虽然它们相应的二次型矩阵不相等，但都是合同的.

4．二次型化为标准形有哪些方法？

答　常用的有 3 种：配方法、初等变换法和特征值法．下面分别用例子来介绍.

（1）配方法　这又分有平方项和无平方项两种情况

例1 （南京大学研究生入学试题） 把二次型 $4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3+3x_3^2$ 化为标准型，并求相应的线性变换和二次型的符号差.

解 设原二次型为 $f(x_1,x_2,x_3)$，则

$$f=3\left[x_3^2-2x_3\left(\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2\right)+\left(\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2\right)^2\right]$$

$$-\frac{1}{3}x_1^2-\frac{1}{3}x_2^2+\frac{10}{3}x_1x_2$$

$$=3\left(x_3-\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2\right)^2-$$

$$\frac{1}{3}[x_1^2-10x_1x_2+(5x_2)^2]+8x_2^2$$

$$=3\left(-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2-x_3\right)^2-\frac{1}{3}(x_1-5x_2)^2+8x_2^2$$

令

$$\begin{cases} y_1=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2-x_3 \\ y_2=x_1-5x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_1=\frac{5}{2}y_1+\frac{1}{6}y_2+\frac{5}{2}y_3 \\ x_2=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{6}y_2+\frac{1}{2}y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

$$f=3y_1^2-\frac{1}{3}y_2^2+8y_3^2$$

f 的符号差等于 1.

例 2 （电视大学） 用满秩线性变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=-2x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ 为标准形，并写出所用满秩线性变换的矩阵 P.

解 令

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}f&=2y_1^2-2y_2^2+2y_2y_3\\&=2y_1^2-2\left[y_2^2+y_2y_3+\left(\frac{1}{2}y_3\right)^2\right]+\frac{1}{2}y_3^2\\&=2y_1^2-2\left(y_2+\frac{1}{2}y_3\right)^2+\frac{1}{2}y_3^2\end{aligned}$$

再令

$$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

即令 $X=PZ$，其中

$$P=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&-\frac{1}{2}&0\\1&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

则

$$f=2z_1^2-2z_2^2+\frac{1}{2}z_3^2.$$

(2) 初等变换法　这种方法是先写出二次型的矩阵 A，然后在 A 的下方拼一个同级的单位阵 E，即形如$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$. 再对

A 作行列的"同步"初等变换（先列,后行），将 A 变为对角阵，这时下面的单位阵记录了 A的列变换情况，变为矩阵 C，则 C 即为可逆变换的系数矩阵，上面的对角阵即为新二次型的矩阵．

我们仍以上面例1为例，用初等变换方法来演算：

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[P(1,3)]{P(1,3)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[P\left(2,1\left(\frac{1}{3}\right)\right)]{P\left(2,1\left(\frac{1}{3}\right)\right)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[P\left(3,1\left(\frac{1}{3}\right)\right)]{P\left(3,1\left(\frac{1}{3}\right)\right)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[P(3,2(5))]{P(3,2(5))}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 8\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 5\\ 1 & \frac{1}{3} & 2\end{pmatrix}$$

则令

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 5\\ 1 & \frac{1}{3} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

$$f=3y_1^2-\frac{1}{3}y_2^2+8y_3^2.$$

(3) 特征值法　这经常用来化实二次型为标准形.

例 4　(上海交大研究生入学试题)　求正交变换把二次曲面方程

$$2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=1 \qquad (1)$$

化为标准方程.

解　令 (1) 式左端二次型为 $f(x_1,x_2,x_3)$，其相应矩阵为 A，则

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

A 有 3 个特征值 1，1，10.

再求出属于 1 的线性无关的特征向量为

$$\alpha_1=(2,0,1), \qquad \alpha_2=(0,1,1)$$

属于 10 的线性无关的特征向量为

$$\alpha_3=(1,\ 2,\ -2)$$

将 α_1，α_2，α_3 用 Schmidt 正交化方法，可得

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1), \qquad \beta_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(-2,5,4),$$

$$\beta_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)$$

令正交变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

那么二次曲面方程化为

$$y_1^2+y_2^2+10y_3^2=1.$$

它是椭球面.

5．合同的矩阵有相同的秩，有相同秩的两个同级方阵是否合同呢？

答　这由讨论的数域决定，比如 $A=E$，$B=-E$，在实数域上它们秩相等，但不合同（这由惯性定理可知）．但在复数域上秩相等的同级方阵，一定合同．

（三）题型归类

1．化标准形

例 1　用非异的线性替换化二次型

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$$

为标准形（并写出相应的非异线性替换）．

解　将原式展开经配方整理可得

$$f=\left(x_1+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}x_i\right)^2+\frac{3}{4}\left(x_2+\frac{1}{3}\sum_{i=3}^{n}x_i\right)^2$$

$$+\cdots+\frac{n}{2(n-1)}\left(x_{n-1}+\frac{1}{n}x_n\right)^2$$

$$+\frac{n+1}{2n}x_n^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n} x_i \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{3}\sum_{i=3}^{n} x_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} + \frac{1}{n}x_n \\ y_n = x_n \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} y_k \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{3}\sum_{k=3}^{n} y_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = y_{n+1} - \frac{1}{n}y_n \\ x_n = y_n \end{cases}$$

则

$$f = y_1^2 + \frac{k+1}{2k}\sum_{k=2}^{n} y_k^2.$$

2．求与对称阵合同的对角阵．

例 2 设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix},$$

求可逆阵 T，使 $T'AT$ 为对角阵．

解 设以 A 为矩阵的二次型为

$$f(x_1, x_2, x_3) = X'AX = 2ax_1x_2 + 2bx_1x_3 + 2cx_2x_3.$$

1）当 $a=b=c=0$ 时，$A=0$ 令 $T=E$ 即为所求．

2）a,b,c 不全为 0，不失一般设 $a\neq 0$．则令

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

则 $$f=2ay_1^2-2ay_2^2+(2b+2c)y_1y_3+(2b-2c)y_2y_3$$

$$=2a\left[y_1^2+2y_1\left(\frac{b+c}{2a}y_3\right)+\left(\frac{b+c}{2a}y_3\right)^2\right]$$

$$-2a\left[y_2^2-2y_2\left(\frac{b-c}{2a}\right)y_3+\left(\frac{b-c}{2a}y_3\right)^2\right]$$

$$-\frac{(b+c)^2}{2a}y_3^2+\frac{(b-c)^2}{2a}y_3^2$$

令 $$\begin{cases}z_1=y_1+\dfrac{b+c}{2a}y_3\\z_2=y_2-\dfrac{b-c}{2a}y_3\\z_3=\qquad\quad y_3\end{cases}$$

或 $$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-\dfrac{b+c}{2a}\\0&1&\dfrac{b-c}{2a}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

所以令 $X=TZ$，则

$$f=2az_1^2-2az_2^2-\frac{2bc}{a}z_3^2.$$

其中

$$T=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-\dfrac{b+c}{2a}\\0&1&\dfrac{b-c}{2a}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{c}{a} \\ 1 & -1 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

从而

$$T'AT=\operatorname{diag}\left(2a,\ -2a,\ -\frac{2bc}{a}\right).$$

例 3 设 $A=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，$B=\operatorname{diag}(\lambda_{i_1},\cdots,\lambda_{i_n})$，证明：$A$ 合同于 B，其中 $i_1,\cdots,i_n$ 为 $1,\cdots,n$ 的任一排列.

证 作二次型 $X'AX=f$. 作满秩变换：

$$y_1=x_{i_1},\ \cdots,\ y_n=x_{i_n}$$

则 $f=X'AX=Y'BY$，所以 A 与 B 合同.

3. 已知对称阵求二次型

例 4 （北方交大研究生入学试题） 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1）分别写出 A 和 A^{-1} 为矩阵的二次型；

2）求 A, A^{-1}, A^2+A 的特征值；

3）求相应 A, A^{-1} 的二次型的标准形.

解 1）首先求出

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

设 A 和 A^{-1} 为矩阵的二次型分别为 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 和 $g(x_1,$

x_2, x_3, x_4)则

$$f = X'AX = 2x_1x_2 + 2x_3^2 + 2x_3x_4 + 2x_4^2,$$

$$g = X'A^{-1}X = 2x_1x_2 + \frac{2}{3}x_2^3 + \frac{2}{3}x_4^2 - \frac{2}{3}x_3x_4.$$

2）因为

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda + 1)[(\lambda - 2)^2 - 1]$$

所以 A 的特征值为 $1, 1, -1, 3$；则 A^{-1} 的特征值为 $1, 1, -1, \frac{1}{3}$；$A^2 + A$ 的特征值为 $2, 2, 0, 12$.

3）可用正交变换法，分别求出 f, g 的标准形为

$$f = X'AX = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + 3y_4^2,$$

$$g = X'A^{-1}X = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + \frac{1}{3}y_4^2.$$

4. 实对称阵和反对称阵的充要条件

例 5 （第三届全国大学生数学夏令营试题）试证实方阵 A 对称当且仅当 $AA' = A^2$.

证 必要性是显然的．下证充分性．设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶方阵，因为 $AA' = A^2$，所以

$$\text{tr}AA' = \text{tr}A^2 \tag{1}$$

令 $AA' = (b_{ij})$，$A^2 = (c_{ij})$，则

$$b_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \quad , \quad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{2}$$

$$c_{jj} = \sum a_{jk}a_{kj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

由(1), (2), (3)三式得

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}a_{kj}. \tag{4}$$

移项整理后有

$$\sum_{i<j} (a_{ij} - a_{ji})^2 = 0.$$

由于A是实矩阵，所以

$$a_{ij}-a_{ji}=0 \quad (i\neq j), \qquad A'=A.$$

注 由此可知题目条件还可削弱为：实方阵A对称当且仅当 $\mathrm{tr}AA'=\mathrm{tr}A^2$. 换句话说，当$A$是实方阵时，下面3个条件彼此等价：$A'=A$；$AA'=A^2$；$\mathrm{tr}AA'=\mathrm{tr}A^2$.

例 6 设$A=(a_{ij})$为n阶方阵，证明A为反对称阵的充要条件是，对任一n维向量X，有$X'AX=0$.

证明之前，先指出一点，任给方阵A（不一定对称），则$f=X'AX$都是一个二次型，但f对应的二次型矩阵不是A，而是$B=(b_{ij})$，其中

$$b_{ij}=\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}. \qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

下面再来证例6.

证 必要性 由于A是反对称阵，所以

$$a_{ij}+a_{ji}=0 \quad (i,j=0,1,\cdots,n) \tag{1}$$

$$X'AX=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{i\neq j}(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j=0. \tag{2}$$

充分性 由假设可知(2)式成立，从而(1)式成立，即$A'=-A$.

注 反对称阵的其它性质可见本书p.100第三章§5.

5. 二次型的秩

例 7 证明：秩等于r的对称矩阵，可以表成r个秩等于1的对称阵之和.

证 设$A'=A$，秩$(A)=r$. 存在可逆阵T，使$T'AT=\mathrm{diag}(d_1,\cdots d_r,0\cdots0)$，其中$d_i\neq0$

$$\begin{aligned}\therefore\quad A&=(T^{-1})'\mathrm{diag}(d_1,\cdots d_r,0\cdots0)(T^{-1})\\&=B_1+\cdots+B_r\end{aligned}$$

其中 $B_i=(T^{-1})'(d_iE_{ii})(T^{-1})$. E_{ii} 为位于第 i 行第 i 列的一个元素为1，其余均为0的 n 阶方阵.

不难证明 $B_i'=B_i$，秩$(B_i)=1$.

§2 实二次型与复二次型的规范形

（一）内容提要

1. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 是复二次型，则存在可逆线性替换 $X=CY$，使得

$$f=y_1^2+\cdots+y_r^2=Y'\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}Y. \tag{1}$$

$r=$秩(A). 这称为复二次型的规范形. 规范形是唯一的.

用矩阵语言叙述，设 A 为 n 阶复对称阵，则存在 n 阶复可逆阵 C，使 $C'AC=\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}$. 其中 $r=$秩(A).

2. 设 $f=X'AX$ 为实二次型，则存在实可逆线性替换 $X=CY$，使得

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-(y_{p+1}^2+\cdots+y_r^2)=Y'\begin{pmatrix}E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & 0\end{pmatrix}Y. \tag{2}$$

其中 $r=$秩(A)，p 为 A 的正惯性指数（即为 A 的正特征值的个数）. 这称为实二次型的规范形，它也是唯一的.

用矩阵语言叙述，设 A 是 n 阶实对称阵，则存在 n 阶实可逆阵 C，使 $C'AC=\begin{pmatrix}E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & 0\end{pmatrix}$.

3. $f=X'AX$ 是实二次型，则存在正交替换 $X=TY$，使

$$f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=Y'\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)Y$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部实特征值.

用矩阵语言叙述，设 A 为 n 阶实方阵，则存在正交阵 T，使得

$$T^{-1}AT = T'AT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n).$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的全部实特征值.

（二）答疑辅导

1. 设 A, B 为两个 n 阶复对称阵，它们合同的条件是什么？如果是实的条件又是什么？

答 当 A，B 为 n 阶复对称阵时，则 A 与 B 合同 $\Longleftrightarrow$ 秩(A) = 秩(B).

当 A, B 为 n 阶实对称阵时，设秩$(A) = r_1$，秩$(B) = r_2$. $X'AX$ 和 $X'BX$ 的正惯性指数分别为 p_1, p_2（负惯性指数当然为 $r_1 - p_1$ 和 $r_2 - p_2$）. 则 A 与 B 在实数域上合同 $\Longleftrightarrow r_1 = r_2$ 且 $p_1 = p_2$（A 与 B 在复数域上合同 $\Longleftrightarrow r_1 = r_2$）.

2. 怎样求出实二次型 $X'AX$ 的正（或负）惯性指数？

答 一般有两种方法. 一种是求出 A 的所有特征值，由于 A 是实对称阵，其特征值都是实数，那么由惯性定理知，其标准形中含正项系数与含负项系数是不会改变的. 从而正（或负）特征根个数即为正（或负）惯性指数.

第二种方法是将 $X'AX$ 化为标准形. 其标准形中含正（或负）项的系数的个数就是正（或负）惯性指数.

3. 按合同关系分类，n 元复二次型(或复 n 阶称对阵)共有多少类？实二次型（或实对称阵）呢？

答 n 元复二次型（或 n 阶复对称阵）共可分成 $n+1$ 类. 秩等于0的是一类，秩等于1的是一类，…，秩等于 n 的是一类.

n 元实二次型 $X'AX$，设秩$(A) = k$. 由惯性定理 A 与

下面之一合同：

$$\begin{pmatrix} E_k & \\ & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_{k-1} & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_{k-2} & & \\ & -E_2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} -E_k & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

共有 $k+1$ 类，而k可以为$0,1,2,\cdots,n$. 故共有类数为：

$$N=1+(1+1)+(2+1)+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

4. 实对称阵的特征值均为实数，复对称阵呢？

答 复对称阵的特征值不一定是实数，比如 $A=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值 为 $i,0$.

但与实对称阵类似的，在复数域中，存在厄米特阵（即 $\overline{A}'=A$），在本书 p.346 第十章证明厄米特阵的特征值均为实数，并且存在酉矩阵U，使得

$$U^{-1}AU=\text{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部实特征值.

（三）题型分类

1. 化规范形

例 1 设 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3+4x_1x_4+2x_2x_3$ 试分别在实数域和复数域上，把它化为规范形，并写出相应的可逆线性替换.

解 首先可用配方法（步骤略）把 f 化为标准形. 即令

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

则 $$f=2y_1^2-2y_2^2-2y_3^2+2y_4^2. \qquad (1)$$

1）在实数域上，再令

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}z_1,\quad y_4=\frac{1}{\sqrt{2}}z_2,\quad y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}z_3,\quad y_3=\frac{1}{\sqrt{2}}z_4$$

那么 $f=z_1^2+z_2^2-z_3^2-z_4^2$. 即为规范形. 可逆线性替换为 $X=TZ$ 其中

$$T=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\0&-1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

2) 在复数域上，由(1) 式，再令

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}z_1,\quad y_2=\frac{i}{\sqrt{2}}z_2,\quad y_3=\frac{i}{\sqrt{2}}z_3,\quad y_4=\frac{1}{\sqrt{2}}z_4$$

则 $f=z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2$,即为规范形，其可逆线性替换为 $X=T_1Z$.其中

$$T_1=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&&&\\&\frac{i}{\sqrt{2}}&&\\&&\frac{i}{\sqrt{2}}&\\&&&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i & -i & 1\\ 1 & i & -i & -1\\ 0 & 0 & i & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2．二次型分解

例 2 证明：一个实二次型可分解为两个实系数的一次齐次多项式之积 $\Longleftrightarrow$ 它的秩等于2，符号差为0，或者秩等于1.

证 $\Longrightarrow$ 设 $f=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+\cdots+b_nx_n)$ 其中 a_i,b_i 均为实数($i=1,2,\cdots,n$)．令

$$B=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\cdots a_n\\ b_1 & b_2\cdots b_n\end{pmatrix}$$

1）当秩$(B)=2$时，不失一般设 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$，则令

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\cdots a_n\\ b_1 & b_2 & b_3\cdots b_n\\ 0 & 0 & 1\cdots 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0 & 0\cdots 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

则 $f=y_1y_2$．再令

$$y_1=z_1+z_2,\quad y_2=z_1-z_2,\quad y_k=z_k\ (k=3,4\cdots n)$$

则

$f=z_1^2-z_2^2$．所以 f 的秩等于2，符号差为0.

2）当秩$(B)=1$时，不失一般设 $a_1\neq0$，且

$$\frac{a_1}{b_1}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=c.$$

令

$$y_1=a_1x_1+\cdots+a_nx_n,\quad y_k=x_k\ (k=2,\cdots,n)$$

则 $f=cy_1^2$，即 f 的秩等于1.

反之1）当 f 的秩等于2，符号差为0. 则存在可逆线性替换 $X=CY$，使

$$f=y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2)$$
$$=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+\cdots+b_nx_n)$$

2）当 f 的秩等于1时，则存在可逆线性替换 $X=DY$，使

$$f=cy_1^2=c(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)^2$$
$$=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)(ca_1x_1+\cdots+ca_nx_n).$$

3. 可逆对称阵的其它合同形.

例3 设 A 是 n 阶可逆复对称阵，则当 $n=2m$ 时 A 合同于 $B=\begin{pmatrix}0 & E_m\\ E_m & 0\end{pmatrix}$；当 $n=2m+1$ 时，A 合同于

$$C=\begin{pmatrix}0 & E_m & 0\\ E_m & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

证 因为两个复对称阵合同 $\Longleftrightarrow$ 秩相等. 结论自然可证.

例4 设 A 是 n 阶可逆实对称阵，E_m 为 m 阶单位阵，则 A 合同于 E_n 或 $-E_n$ 或 B，其中

$$B=\begin{pmatrix}0 & E_p & 0\\ E_p & 0 & 0\\ 0 & 0 & -E_{n-2p}\end{pmatrix}$$

证 我们知道：两实对称阵合同 $\Longleftrightarrow$ 秩相等且正惯性指数相等.

1）设秩$(A)=n=A$ 的正惯性指数. 则 A 合同于 E.

2）秩$(A)=n$，设 A 的正惯性指数$=0$. 则 A 的负惯性

指数为 n. 这时 A 合同于 $-E$.

3) 秩$(A)=n$, 设 A 的正惯性指数为 $p(0<p<n)$. 而 $|\lambda E-B|=(\lambda-1)^p(\lambda+1)^{n-p}$. 则秩$(B)=n$, B 的特征值中有 p 个 1, $(n-p)$ 个 -1. 即 B 的正惯性指数为 p. 所以 A 合同于 B.

4. 实二次型的正(或负)惯性指数的界.

例5 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=l_1^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2$, 其中 $l_i(i=1,2,\cdots,p+q)$ 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的实一次齐次式. 证 f 的正惯性指数 $\leqslant p$, 负惯性指数 $\leqslant q$.

证 设 $l_i=b_{i1}x_1+\cdots+b_{in}x_n$ $(i=1,2,\cdots,n)$, f 的正惯性指数为 s, 秩为 r. 则存在非异线性替换

$$y_i=c_{i1}x_1+\cdots+c_{in}x_n \ (i=1,2\cdots n) \qquad (1)$$

使

$$\begin{aligned} f&=l_1^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2 \\ &=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_r^2. \end{aligned} \qquad (2)$$

下证 $s\leqslant p$. 用反证法, 设 $s>p$. 考虑线性方程组

$$l_1=l_2=\cdots=l_p=y_{s+1}=\cdots=y_n=0 \qquad (3)$$

由于齐次方程组(3), 未知量个数为 n, 方程个数为 $p+n-s<n$. 故方程组 (2) 存在非零解 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 将它代入(2)式两端, 得

$$f(a_1,\cdots,a_n)=-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2=y_1^2+\cdots+y_s^2 \qquad (4)$$

要使(4)式成立, 必须

$$l_{p+1}=\cdots=l_{p+q}=y_1=\cdots=y_s=0 \qquad (5)$$

由 (3),(5) 知对于 $x_1=a_1,\cdots,x_n=a_n$ 这组非零数, 使 $y_1=\cdots=y_n=0$. 这与 (1) 是非异线性替换 (系数矩阵满秩) 矛盾. 所以 $s\leqslant p$.

类似可证: 负惯性指数 $\leqslant q$.

5．实二次型的值．

例6（北京工大，西南交大研究生入学试题）

设 A 为 n 阶实对称阵，$|A|<0$．证明：必存在实 n 维向量 $X\neq 0$，使 $X'AX<0$．

证 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$，A 的 n 个实特征值为 λ_1，$\cdots,\lambda_n$，由于 $|A|=\lambda_1\cdots\lambda_n<0$，至少有一个特征值为负，不妨设为 $\lambda_1<0$，则存在正交替换 $X=CY$，使

$$f(x_1\cdots x_n)=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

令 $Y_0=(1,0,\cdots,0)'$，求出 $CY_0=(a_1\cdots a_n)'=X_0'\neq 0$，那么

$$X_0'AX_0=f(a_1\cdots a_n)=\lambda_1<0.$$

例7 （南京大学研究生入学试题） 设

$$f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$$

是一实二次型，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征多项式的根，且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，证明对任一 $X\in R^n$，有

$$\lambda_1 X'X'\leqslant X'AX\leqslant\lambda_n X'X. \qquad (1)$$

证 存在正交阵 T，使

$$T'AT=\text{dig}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n). \qquad (2)$$

令 $X=TY$，$B=\text{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

则
$$X'AX=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2=Y'BY, \qquad (3)$$

$$\lambda_1 Y'Y\leqslant X'AX=Y'BY\leqslant\lambda_n Y'Y, \qquad (4)$$

$$X'X=(TY)'TY=Y'Y.$$

代入 (4) 得证

$$\lambda_1 X'X\leqslant X'AX\leqslant\lambda_n X'X.$$

§3 正定与半正定二次型

（一）内容提要

1．n 元实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$，若对 $\forall C\in R^n$

$C\neq 0$ 有 $f(c_1,\cdots,c_n)=C'AC>0$(或<0)，称 f 是正(负)定二次型，称 A 为正(负)定阵.

2. 下列条件之一都是 n 元实二次型 $f=X'AX$ 为正定的充要条件：

(1) A 的所有顺序主子式都大于零；

(2) A 的所有特征值均为正；

(3) f 的正惯性指数等于 n.

3. 下列条件之一都是 n 元实二次型 $g=X'BX$ 为负定的充要条件：

(1) B 的所有奇数阶顺序主子式小于0，所有偶数阶顺序主子式大于0；

(2) B 的所有特征值均为负；

(3) g 的负惯性指数等于 n；

(4) $-B$ 为正定阵.

4. n 元实二次型 $f=X'AX$，对 $\forall C\in R^n$，有 $f(c_1\cdots c_n)=C'AC\geqslant 0$(或$\leqslant 0$)，称 f 为半正(负)定二次型，称 A 为半正(负)定阵.

5. 下列条件之一都是 n 元实二次型 $f=X'AX$ 为半正(负)的条件：

(1) A 的所有主子式都不小(大)于0；

(2) f 的负(正)惯性指数等于0；

(3) A 的特征值都不小(大)于0.

(二) 答疑辅导

1. 正定矩阵还有没有其它等价条件？

答 有. 下列五个条件都是等价的：

(1) A 是正定矩阵；

(2) 存在正定矩阵 G，使 $A=G^2$；

(3) A 合同于 E，或者说存在实可逆矩阵C，使 $A=C'C$；

(4) 对于任意 $n\times 1$ 非零矩阵X，都有$X'AX>0$；

(5) A 的所有主子式都大于零，

下面采用循环证法：

(1) $\Longrightarrow$ (2) 因 A 正定，设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是 A 的全部特征值，于是 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$. 存在正交矩阵$U$，使

$$U'AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

从而

$$\begin{aligned}A&=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U'\\&=U\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})U'U\cdot\\&\quad\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})U.\end{aligned}$$

令

$$G=U\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})U'$$

则

$$A=G^2.\ 且\ G\ 是正定矩阵.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) 因 G 正定，则 $G'=G$，$|G|\neq 0$.

从而 $$A=G^2=G'G=G'EG.$$

(3) $\Longrightarrow$ (4) 因 $A=C'C$，$|C|\neq 0$，X 是 $n\times 1$ 非零矩阵，于是 $CX\neq 0$，令 $CX=(t_1,t_2,\cdots,t_n)'$，$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是不全为零的实数，所以

$$X'AX=X'C'CX=(CX)'(CX)=t_1^2+t_2^2+\cdots+t_n^2>0.$$

(3) $\Longrightarrow$ (5) 设 A_k 是 A 的任一 k 阶主子块.

$$|A_k|=\begin{vmatrix}a_{i_1i_1}\cdots a_{i_1i_k}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{i_ki_1}\cdots a_{i_ki_k}\end{vmatrix}\quad 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$$

又设 B 与 A 合同，且 B 的 k 阶顺序主子式是 A_k，即存

在一可逆阵C，使

$$C'AC=\begin{pmatrix} A_k & * \\ * & * \end{pmatrix}=B.$$

得
$$A=(C^{-1})'BC^{-1}$$

下证A_k是正定矩阵. 否则，存在$k\times 1$非零矩阵$x=(d_1,d_2,\cdots,d_k)'$，使$X'A_kX\leqslant 0$.

令$n\times 1$非零阵$y=C\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$,则

$$Y'AY=Y'(C^{-1})'BC^{-1}Y=(C^{-1}Y)'B(C^{-1}Y)$$
$$=(x' \quad 0)\begin{pmatrix} A_k & * \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}=x'A_kx\leqslant 0$$

这与(4)的假设矛盾. 故A_k正定，从而$|A_k|>0$.

(5) $\Longrightarrow$ (1) 显然成立.

类似地，A为半正定矩阵的充要条件还有：

(1) 存在半正定矩阵G，使$A=G^2$;

(2) 存在n阶矩阵C，使$A=C'C$;

(3) A与$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$合同，$r=$秩$A$,

2. 正定矩阵有哪些简单性质?

答 设A是正定矩阵，则

(1) A是可逆实对称阵，特别$|A|>0$.

(2) A能而且只能与正定矩阵合同，A只能与正定矩阵相似;

(3) A的一切主子块都是正定矩阵;

(4) A中最大的数，位于主对角线上;

(5) A中主对角线上的数全大于零.

3. 实对称阵A的主对角线上的数全大于零，能否断定

A是正定矩阵？

答　不能．如$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$就不是正定矩阵．

4．实对称阵A的一切顺序主子式全大于或等于零，能否断定A是半正定矩阵？

答　不能．如$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$的顺序主子式全等于零，而取$X=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，有$X'AX=-1<0$，这也说明判断半正定矩阵时，“一切主子式全大于或等于零”这个条件不能削弱．

5．什么叫不定二次型？

答　实二次型$f=X'AX$，若存在$C\in R^n$，$D\in R^n$，有

$$C'AC>0,\quad D'AD<0.$$

两式成立，称f为不定二次型．

6．不定二次型有哪些主要性质？

答　有两个主要性质

(1) 设$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$n$元不定二次型$f=X'AX$的所有特征值至少存在两个特征值$\lambda_i>0$，$\lambda_j<0$．

(2)（黑龙江应用数学研究所研究生入学试题）存在$C\neq 0$，$C\in R^n$使不定二次型$f=X'AX$有

$$f(c_1,\cdots,c_n)=C'AC=0.$$

事实上，由上面性质(1)知A的特征值有正有负，不失一般设$\lambda_1>0$，$\lambda_2<0$．再由实二次型基本定理知，存在正交阵T，令$X=TY$，则

$$f=X'AX=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2 \qquad (1)$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$A$的全部特征值．

再令　$Y_0=\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}},\frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}},0,\cdots,0\right)'$，$C=TY_0\neq 0$　则

$$f(c_1\cdots c_n)=\lambda_1\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2+\lambda_2\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda_2}}\right)^2=1-1=0.$$

7. 能否对各种二次型的主要常数列一个表来归纳一下？

答 设 n 元实二次型 $f=X'AX$，秩$(A)=r$，设 f 的正惯性指数和负惯性指数分别为 p 和 q，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部实特征值，$|B_i|$为 A 的 i 级主子式，则我们有下表

类 型	r	p	q	λ_i	一切 $\vert B\vert_i$
正定	n	n	0	大于0	大于0
半正定	p	p	0	$\geqslant 0$	$\geqslant 0$
负定	n	0	n	小于0	$(-1)^i\vert B_i\vert>0$
半负定	q	0	q	$\leqslant 0$	$(-1)^i\vert B_i\vert\geqslant 0$
不正	r	大于0	大于0	有正有负	无规律

8. 有什么简便方法能判断实对称阵 A 不是正定矩阵？

答 除上述判别法以外，还有

(1) $|A|\leqslant 0$或A的某一主子式小于等于零；

(2) A 中主对角线上有一个数小于或等于零；

(3) A 中最大的数不在主对角线上.

9. 有什么简便方法能判断实对称阵 A 不是负定矩阵？

答 有三种简便方法：

(1) A 中主对角线上有一元 $a_{ii}\geqslant 0$；

(2) A 中某一奇（偶）数级主子式 $\geqslant 0(\leqslant 0)$.

10. 怎样判断二次型 $X'AX$ 是不定型二次型？

答 主要方法有三：

(1) A 中主对角线上的元有正有负，

(2) A 中有两个同级主子式异号；

(3) A 中有一个偶数级主子式小于0.

（三）题型归类

1. 正定（半正定，负定，半负定）二次型的判别

（1）惯性指数判别法

例 1 判断 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 是否为正定.

解 因为

$$f=2(x_1+x_2-x_3)^2+3\left(x_2-\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_2^3$$

由于作非退化线性替换后，$f=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$. 则惯指数等于3，所以 f 是正定二次型.

（2）特征值的判别法

例 2 （大连海运学院研究生入学试题） 试证二次型

$$f(x_1,\cdots,x_n)=2\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{1<i<j<n}x_ix_j$$

为正定二次型.

证 设 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix},$$

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^{n-1}(\lambda-n-1).$$

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=1,\ \lambda_n=n+1.$$

由于 A 的特征值全为正，f 是正定二次型.

（3）顺序主子式判别法（Sylvester 准则）

例 3 （浙江大学研究生入学试题） 设有二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$.

问 λ 取何值时，该二次型为正定.

解 设 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

它的各阶主子式必须

$$\Delta_1 = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1-\lambda^2 > 0 \qquad (1)$$

$$\Delta_3 = |A| = -5\lambda^2 - 4\lambda > 0 \qquad (2)$$

由(1),(2)得出 当 $-\frac{5}{4}<\lambda<0$ 时，f 为正定.

(4) 其它方法

例 4 （四川大学研究生入学试题） 设

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}-\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^2$$

的正惯性指数 p，秩为 r，证明：$p=r<n$（即 f 半正定）

证 $$f=\frac{1}{n^2}\left[(n-1)\sum x_i^2-2\sum_{i<j}x_ix_j\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2\geqslant 0.$$

由此可知 f 半正定，$p=r$.

另一方面，令 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时，$f=0$，此说明 f 不是正定的. 即 $p\neq n$，从而 $p=r<n$.

2. 由参数取值范围来确定二次型的类型

例 5 （清华大学研究生入学试题） 设

$$f=a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_ix_{n-i+1}$$

其中 a,b 是实数，问 a,b 满足什么条件时，二次型 f 是正定的？

解 设 f 对应的矩阵为 A，则 当 $n=2m$ 时

$$A=\begin{pmatrix} a & \cdots\cdots & & & \cdots & b \\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ a & \cdots\cdots & & & \cdots & b \end{pmatrix} \tag{1}$$

再设 A_k 为 A 的第 k 级顺序主子式，则由(1)式

$$A_k=a^k \qquad (k=1,2,\cdots,m) \tag{2}$$

$$A_{m+k}=a^{m-k}(a^2-b^2)^k \qquad (k=1,2,\cdots,m) \tag{3}$$

故当 $a>0$ 且 $a^2-b^2>0$ 时，f 正定.

当 $n=2m+1$ 时，

$$A=\begin{pmatrix} a & & & & b \\ & \ddots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a & & b & \\ & & a+b & & \\ & b & & a & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \ddots & \\ b & & & & a \end{pmatrix} \tag{4}$$

这时

$$A_k=a^k \qquad (k=1,2,\cdots,m);$$

$$A_{m+1}=(a+b)a^m;$$

$$A_{m+1+k}=(a+b)a^{m-k}(a^2-b^2)^k.$$

所以当 $a>0$，$a+b>0$，$a^2-b^2>0$ 时，f 正定.

3. 与 A 有关的正定阵

例 6 设 A 正定阵，证明：

1) A^{-1}，$kA(k>0)$，A^m(m 为整数)，A^* 都是正定 阵.

2) $g(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$ 其中 $a_i\geqslant 0$，且至少有一为正，则 $g(A)$正定.

证 设 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 由 A 正定，则

$$\lambda_i>0 \quad (i=1,2,\cdots n) \tag{1}$$

1) 下面分别证明

i) 先证 A^{-1} 为正定阵(东北工学院研究生入学试题).

由于 A^{-1} 也是实对称阵,且它的全部特征值为$\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$. 由(1)知它们全为正，所以 A^{-1} 为正定阵.

ii) kA 是实对称阵，kA 的全部特征值为 $k\lambda_1,\cdots,k\lambda_n$,而 $k>0$，所以 kA 的特征值全为正，kA 正定.

iii) A^m 是实对称阵，它的特征值为 $\lambda_1^m,\cdots,\lambda_n^m$ 全为正，A^m 正定.

iv) 再证 A^* 为正定阵（山东大学，新疆大学研究生入学试题）

因为 $A^*=\frac{1}{|A|}A^{-1}$，由上面1),2)可证 A^* 正定.

2) $g(A)$的全部特征值为：

$$g(\lambda_1),\cdots,g(\lambda_n)$$

由假设知，它们全为正，所以 $g(A)$为正定阵.

例 7 （福州大学研究生入学试题） 设 C 为实非奇异矩阵，证明A 为正定阵时，矩阵 $C'AC$ 也是正定阵；且其逆也成立.

证 设 A 为正定阵，从而 $B=C'AC$ 为实对称阵，且与 A 合同，但合同不改变正定性，故 $C'AC$ 为正定阵.

反之，设 $B=C'AC$ 为正定阵，则 $A=(C^{-1})'BC^{-1}$，由 B 正定，从而 A 正定.

例 8 （东北工学院研究生入学试题）设 n 阶矩阵$A=(a_{ij})$ 是正定的，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是任意 n 个非零实数，那么 $B=(a_{ij}b_ib_j)$也是正定的.

证 令 $C=\text{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则 C 为实可逆阵，且 $B=C'AC$. 则由上题可证B为正定阵.

例 9 （成都科技大学，湖南师大研究生入学试题）n 阶矩阵 A 是半正定的，则对任何实数 $\varepsilon>0$，$\varepsilon E+A$ 是正定的.

证 令 $g(x)=x+\varepsilon$，设A的n个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 则 $g(A)$的 n 个特征值为 $\lambda_1+\varepsilon,\lambda_2+\varepsilon,\cdots,\lambda_n+\varepsilon$, 但 $\lambda_i\geqslant 0$, $\varepsilon>0$，故实对称阵 $g(A)=A+\varepsilon E$ 的特征值全为正，$g(A)$是正定的.

例10 （中山大学，湖南师大研究生入学试题） 证明实对称阵 A 的特征根均在闭区间$[a,b]$上，当且仅当矩阵 $A-tE$ 的二次型对 $t>b$ 时为负定，对 $t<a$ 时为正定.

证 设 A 的全部特征根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 则 $A-tE$ 的特征根为 $\lambda_1-t,\lambda_2-t,\cdots,\lambda_n-t$. 由于

$$a\leqslant\lambda_i\leqslant b \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

$$a-t\leqslant\lambda_i-t\leqslant b-t \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

当 $t>b$ 时，由(2)式知 $\lambda_i-t<0$. 故 $A-tE$ 负定，当 $t<a$ 时，$\lambda_i-t>0$，故 $A-tE$ 正定.

反之，用反证法，若某一个 $\lambda_i\in[a,b]$， 有两种可能：

1） $\lambda_i>b$，则由充分假设 $A-\lambda_iE$ 负定,这是不可能的，因为 $A-\lambda_iE$ 至少有一特征根为0，矛盾.

2） $\lambda_i<a$，同理可得出矛盾.

综上可知 A 的特征根均在闭区间$[a,b]$上.

例11 （南京大学，杭州大学，福州大学研究生入学试题） 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵.

1） 证明：AA' 和 $A'A$ 均为半正定阵；

2） 试证当且仅当 A 的秩为 n时，$A'A$ 为正定阵.

证 1） 我们只证 $A'A$ 为半正定阵，另一类似，任取 $x\in R^n$，令 $y=Ax=(y_1,\cdots,y_m)'$，则

$$x'(A'A)x=y'y=y_1^2+\cdots+y_m^2\geqslant 0$$

故 $A'A$ 是半正定的.

2）设秩 $A=n$，则秩$(A'A)=n$，设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 $A'A$ 的全部特征值，由于 $A'A$ 半正定，则

$$\lambda_i\geqslant 0\ (g=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A'A|\neq 0 \tag{2}$$

由(1)，(2)两式知 λ_i 都为正. 故 $A'A$ 正定.

4．正定阵的运算

例12 设 A 为 n级 半正定阵，B 为n 阶正定阵，则$A+B$ 为正定阵.

证 $A+B$ 为实对称阵，且任取 $x\in R^n$，$x\neq 0$，则

$$x'(A+B)x=x'Ax+x'Bx>0.$$

所以 $A+B$ 是正定阵.

例13 A,B 为 n 阶正定阵，$AB=BA$，则AB 为正定阵.

证 $(AB)'=B'A'=BA=AB$，则 AB 为实对称阵.

再证 AB 所有特征值大于0（西北工业大学研究生入学试题）.

A 正定，A 合同于 E，存在实可逆阵T，使 $TAT'=E$，则

$$TABT^{-1}=TAT'(T')^{-1}BT^{-1}=(T^{-1})'BT^{-1}=C \tag{1}$$

由于B 正定，从而 C 正定，再由(1)式知 AB 与 C 相似，有相同特征值，必全为正.

5．分块正定阵

例14 设$A=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & C\end{pmatrix}$，$B$、$C$ 都是实对称阵证明 A 正定的充要条件是 B、C都正定.

证 必要性 因 A 正定，B、C 都是 A 的主子式，所以

B、C 都正定.

充分性　B、C 正定. 则 $A'=A$. 设 $B=B_1'B_1$, $C=C_1'C_1$ 且 $|B_1|\neq 0$, $|C_1|\neq 0$, 则

$$A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$$

且 $\begin{vmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{vmatrix}=|B_1||C_1|\neq 0$ 所以 A 正定.

例15　设 $A=\begin{pmatrix} B & D \\ D' & C \end{pmatrix}$. 为实对称阵, 证明 A 正定的充要条件是 B 正定且 $C-D'B^{-1}D$ 正定.

证　$$\begin{pmatrix} E & -B^{-1}D \\ 0 & E \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} B & D \\ D' & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -B^{-1}D \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C-D'B^{-1}D \end{pmatrix},$$

所以 A 与 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C-D'B^{-1}D \end{pmatrix}$合同由例14知. A 正 定 的充要条件是 B 正定且 $C-D'B^{-1}D$ 正定.

例16　(复旦大学研究生入学试题)设 $B=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha' & \beta \end{pmatrix}$, 其中 A 为 n 阶正定阵, α 为 n 维实列向量, β 为实数, 证明 B 为正定阵的充要条件是 $\beta>\alpha'A^{-1}\alpha$

证　由上面例15立即可得.

§4　综合题

例 1　(北京大学研究生入学试题)设 $A'=A$, 证明 A 可逆的充要条件是存在矩阵 B, 使 $AB+B'A$ 正定.

证　若 A 可逆, 令 $B=A^{-1}$, 则 $AB+B'A=2E$ 正定.

反之，存在 B 使 $AB+B'A$ 正定．则对于任意 $X\neq 0$，有

$$X'(AB+B'A)X=(AX)'BX+(BX)'AX>0$$

当 $X\neq 0$ 时，$AX\neq 0$，即 $AX=0$ 只有零解．故 A 可逆．

例 2　（山东大学研究生入学试题）设 n 元半正定二次型 f 的矩阵是 A，证明 $V=\{X|f(X)=0,\ X\in R^n\}$ 是 $AX=0$ 的解空间．

证　设 X_0 是 $AX=0$ 的任一解向量．于是

$$f(X_0)=X_0'AX_0=0.$$

即　$X\in V$．

反之　任取 $X_0\in V$，则 $f(X_0)=X_0'AX_0=0$

因 A 半正定，存在半正定阵 G，使 $A=G^2$ 则

$$X_0'AX_0=X_0'G^2X_0=(GX_0)'(GX_0)=0,$$

$$\therefore\qquad GX_0=0,\ AX_0=G^2X_0=0.$$

X_0 是 $AX=0$ 的解，故 V 是 $AX=0$ 的解空间．

例 3　1)　（郑州大学研究生入学试题）　设 A 为 n 阶半正定阵，B 为 n 级正定阵，证明 $|A+B|\geqslant|B|$，且等号成立当且仅当 $A=0$．

2)（兰州大学，福州大学研究生入学试题）A 为半正定阵，$A\neq 0$．证明：$|A+E|>1$．

证　1) 存在实可逆阵，使 $P'BP=E$．则

$$P'(A+B)P=PA'P+E=C+E \tag{1}$$

其中 $C=P'AP$ 仍为半正定阵．设 C 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 则

$$\lambda_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots n)\ .$$

而 $C+E$ 的特征值为 $\lambda_1+1,\cdots,\lambda_n+1$．则由 (1) 式两边取行列式得

$$|P|^2\cdot|A+B|=|C+E|$$

$$=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)\geqslant 1 \qquad (2)$$

$$\therefore\quad |A+B|\geqslant\frac{1}{|P|^2}=|B|.\ (\because P'BP=E)$$

再当 $A=0$ 时显然 $|A+B|=|B|$.

反之，设 $|A+B|=|B|$，若 $A\neq 0$，$C=P'AP$，则 $C\neq 0$. 至少有一个 $\lambda_j>0$. 则由(2)式知

$$|P|^2\cdot|A+B|>1 \qquad \therefore \qquad |A+B|>|B|$$

矛盾. 所以 $A=0$.

2）由上面直接可证.

例 4 （日本东京大学研究生入学试题） 试用酉矩阵 U，将 A 对角化，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{5} & 1\\ \sqrt{5} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

解 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda+2)$，$A$的特征值为0, 3, -2. 属于 0, 3, 2 的线性无关的单位特征向量分别为

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(0,-1,\sqrt{5})',\quad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{15}}(3,\sqrt{5},1)',$$

$$\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{10}}(-2,\sqrt{5},1)'$$

再令 $U=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为正交阵，也可以看成酉矩阵，且

$$\bar{U}'A\bar{U}=\bar{U}^{-1}A\bar{U}=\mathrm{diag}(0,3,-2).$$

例 5 （清华大学，大连工学院研究生入学试题） n 元实二次型 $f=X'AX$，其中 $X=(x_1,\cdots,x_n)$，证明 f 在条件 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$ 下的最大值，最小值分别恰为矩阵 A 的最大特征根与最小特征根.

证 设 A 的 n 个特征值为

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \quad (1)$$

由p.237本章§2 例 7 知

$$\lambda_1 X'X \leqslant X'AX \leqslant \lambda_n X'X \quad (2)$$

当 $X'X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$时，由(2)式知

$$\max(X'AX) = \max f(x_1, \cdots, x_n) \leqslant \lambda_n \quad (3)$$

设 λ_n 的单位特征向量为 $\alpha = (c_1 \cdots c_n)'$，则 $\alpha'\alpha = c_1^2 + \cdots + c_n^2 = 1$

$$f(c_1 \cdots c_n) = \alpha' A\alpha = \alpha' \lambda_n \alpha = \lambda_n \alpha' \alpha = \lambda_n \quad (4)$$

由(3)，(4)两式得证

$$\max f(x_1 \cdots x_n) = \lambda_n.$$

类似可证 $\min f(x_1 \cdots x_n) = \lambda_1.$

例 6 （中国科学院研究生入学试题） 设$f(x_1, \cdots, x_n)$和 $g(x_1, \cdots, x_n)$ 为两个实二次型，而且至少其中之一是正定的，求证：在 R^n 中曲面 $f=1$ 和 $g=1$ 没有公共点的充要条件是二次型 $f-g$ 是定的（正定或负定）.

证 不失一般，设 f 是正定二次型，再令 $h=f-g$.

$\Leftarrow$设 h 是正定的，则对任意$(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$，有

$$h(x_1 \cdots x_n) \neq 0. \quad (1)$$

用反证法．在 R^n 中若 $f=1$，$g=1$ 有公共点$(a_1, \cdots, a_n)$，则

$$f(a_1, \cdots, a_n) = g(a_1, \cdots, a_n) = 1$$

从 $h(a_1 \cdots a_n) = 0$ 这与(1)式矛盾．故无公共点.

设 h 是负定时，也可证 $f=1$，$g=1$ 无公共点.

$\Rightarrow$用反证法若 h 是不定的，则由 p.241本章 §3答疑辅导6知，存在$(c_1 \cdots c_n) \neq 0$有 $h(c_1 \cdots c_n) = 0$．从而由 f 正定，有

$$f(c_1 \cdots c_n) = g(c_1 \cdots c_n) = d > 0. \quad (2)$$

令

$$d_i=\frac{1}{\sqrt{d}}c_i\ (i=1,2,\cdots,n)$$

则

$$f(d_1,\cdots,d_n)=g(d_1,\cdots,d_n)=1$$

这与 $f=1$，$g=1$ 无公共点假设矛盾.

例 7 （福建师大研究生入学试题） 设 A,B,AB都是 n 级实对称阵，λ 是 AB 的一个特征根，则存在 A 的一个特征根 s，和 B 的一个特征根 t，使得 $\lambda=st$.

证 由 $AB=BA$，且 A,B 都可对角化，则p.111由第三章综合题例 8 知，存在同一个可逆阵 T，使

$$A=T\mathrm{diag}(s_1,\cdots,s_n)T^{-1},\quad B=T\mathrm{diag}(t_1,\cdots,t_n)T^{-1},$$

其中 $s_1,\cdots,s_n$ 和 $t_1,\cdots,t_n$ 分别为 A,B 的特征根.

$$AB=T\mathrm{ding}(s_1t_1,\cdots,s_nt_n)T^{-1}.$$

则 AB 的特征根为 $s_1t_1,\cdots,s_nt_n$. 从而即证.

例 8 （Craig 引理） 设 A,B 是 n 阶实对称阵，它们的非零特征值分别为$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}$，$\{\mu_1,\cdots,\mu_s\}$. 若 $A+B$ 的非零特征值恰好是$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\mu_1,\cdots,\mu_s\}$. 则$AB=BA=0$.

证 1）先设 $A=\mathrm{diag}(D_\lambda,0,0)$，其中 $D_\lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$. 由假设，存在正交阵

$$Q=\begin{pmatrix}Q_{11}&Q_{12}&Q_{13}\\Q_{21}&Q_{22}&Q_{23}\\Q_{31}&Q_{32}&Q_{33}\end{pmatrix}$$

使得 $Q'BQ=\mathrm{diag}(0,D_\mu,0)$，其中 $D_\mu=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_s)$. 令

$$T=\begin{pmatrix}E&Q_{12}&0\\0&Q_{22}&0\\0&Q_{32}&0\end{pmatrix}$$

可以验证

$$B=Q\operatorname{diag}(0,D_\mu,0)Q'=T\operatorname{diag}(0,D_\mu,0)T',$$

$$A=T\operatorname{diag}(D_\lambda,0,0)T',$$

$$\therefore\quad A+B=T\operatorname{diag}(D_\lambda,D_\mu,0)T'.$$

再令 $F=\operatorname{diag}(D_\lambda,D_\mu,0)T'T$，则

$$F=\begin{pmatrix}D_\lambda & & \\ & D_\mu & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & E & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M & \\ & 0\end{pmatrix},$$

其中

$$M=\begin{pmatrix}D_\lambda & \\ & D_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & Q_{12}\\ Q_{12} & E\end{pmatrix}.$$

由 sylvester 公式（p.200 第 6 章 §2 例 6 ）知，于 F 与 $A+B$ 具有相同非零特征值，因此

$$|M|=(\lambda_1\cdots\lambda_r)(\mu_1\cdots\mu_s)=(\lambda_1\cdots\lambda_r)(\mu_1\cdots\mu_s)|E-Q_{12}'Q_{12}|$$

$$\therefore\quad |E-Q_{12}Q_{12}|=0. \tag{1}$$

其次，由于 Q 为正交阵，则

$$Q_{12}'Q_{12}+Q_{22}'Q_{22}+Q_{32}'Q_{32}=E_s$$

设 $Q_{12}'Q_{12}$ 的特征值为 $\delta_1,\cdots,\delta_s$. 因 $Q_{22}'Q_{22}+Q_{32}'Q_{32}$ 和 $Q_{12}'Q_{12}$ 均为半正定阵. 故 $0\leqslant\delta_i\leqslant1$. 由(1)式知

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\delta_i)=1,\quad\therefore\qquad \delta_i=0\ \ (i=1,2,\cdots,s)$$

从而有 $Q_{12}'Q_{12}=0$，即证 $Q_{12}=0$. 于是

$$AB=\begin{pmatrix}D_\lambda & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0 & 0\\ 0 & Q_{22} & 0\\ 0 & Q_{32} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & \\ & D_\mu & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0 & 0\\ 0 & Q_{22}' & Q_{32}'\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0.$$

同理可证 $BA=0$.

2）当 A 为一般情形时，因存在正交阵 G 使

$$G'AG=\mathrm{diag}(D_\lambda,0,0)=A_1.$$

令 $G'BG=B_1$. 由上面可证 $A_1B_1=B_1A_1=0$. 所以有

$$AB=BA=0.$$

例 9　A,B 是两个 $n\times n$ 实对称阵，且 B 是正定阵，证明：存在一个 $n\times n$ 实可逆阵 T，使 $T'AT$ 与 $T'BT$ 同时为对角阵.

证　由 B 正定，合同于 E，存在实可逆阵 C 使 $C'BC=E$. 而 $C'AC$ 仍是实对称阵，从而存在正交阵 D，使

$$D'(C'AC)D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

令 $CD=T$，则 T 可逆且

$$T'AT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\quad T'BT=E.$$

第八章　矩阵的几种标准形

§1　正交阵

（一）内容提要

1．实方阵 $A=(a_{ij})$，如果有 $A'A=E$，则称 A 正交阵．设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为正交阵 A 的行向量，$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 A 的列向量，则

$$\alpha_i\alpha'_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases},\qquad \beta'_i\beta_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}.$$

2．设 A 为正交阵，则 $|A|=1$ 或 -1．

3．设 λ 为正交阵 A 的特征值，则 $|\lambda|=1$ 即 $\lambda=\cos\theta+i\sin\theta$．特别当 A 为正交对称阵时，$\lambda=\pm1$．（见 p.202 例11）

4．设 A，B 是两个 n 阶正交阵，则 AB 和 $A^m(m\in z)$ 仍为正交阵．

5．上三角的正交阵必为对角阵，且对角元为 ±1
（见[1]p.372.）

（二）答疑辅导

1．A 是正交阵，A^{-1}，A' 与 A^* 是不是正交阵？

答　A^{-1}，A' 是正交阵这是容易验证的，再看 A^*．

$$(A^*)'A^*=(A')^*A^*=(AA')^*=E^*=E.$$

故 A^* 也为正交阵．

2．正交阵 A 的（相似）标准形是什么？

答　存在正交阵 Q，使

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} E_r & & & & \\ & -E_t & & & \\ & & B_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_s \end{pmatrix},$$

$$其中B_k=\begin{pmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$$

证明见下一节 p.267.

3. 正交阵有哪些主要的等价条件？

答　至少还有两个等价条件：

(1) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶矩阵定义 $\sigma(A)=\sum_{i,j}a_{ij}^2$，则 A 为正交阵的充要条件是：对任意 n 阶实方阵 B，都有 $\sigma(ABA')=\sigma(B)$.

先证必要性，因为 $\sigma(B)=\mathrm{tr}\,B'B$，所以

$$\sigma(ABA')=\mathrm{tr}(ABA)'(ABA)=\mathrm{tr}(A'B'BA)$$
$$=\mathrm{tr}(A^{-1}B'BA)=\mathrm{tr}(B'B)=\sigma(B).$$

再证充分性，设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. 先取 $B=E$，则

$$n=\sigma(B)=\sigma(ABA')=\sigma(AA')=\sigma(A'A),$$

$$\sigma(A'A)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i'\alpha_i)^2+\sum_{i\neq j}(\alpha_i'\alpha_j)^2=n. \qquad (1)$$

再取 $B_1=e_ie_i'$，其中 $e_i'=(0\cdots0,1,0,\cdots0)$，则

$$\sigma(AB_1A')=\sigma(\alpha_i\alpha_i')=\sigma(\alpha_i'\alpha_i)=(\alpha_i'\alpha_i)^2. \qquad (2)$$

由充分性假设，有

$$\sigma(AB_1A')=\sigma(B_1)=\sigma(e_ie_i')=(e_i'e_i)^2=1. \qquad (3)$$

将(3)式代入(2)式，得 $(\alpha_i'\alpha_i)^2=1$，即 $\alpha_i'\alpha_i=1$. 由 i 的任意性以及（1）式，故 $\alpha_i'\alpha_j=0(i\neq j)$. 从而有

$$\alpha'_i \alpha_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

即 A 为正交阵.

(2) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实方阵，$X=(x_1, \cdots, x_n)$ 为 $1\times n$ 复矩阵，$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)=XA$，则 A 为正交阵的充要条件是：对任何 X 都有

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \bar{y}_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{x}_k.$$

先证必要性. A 为正交阵，$AA'=E$. 则

$$\sum y_k \bar{y}_k = Y\bar{Y}' = XAA'\bar{X}' = X\bar{X}' = \sum x_k \bar{x}_k.$$

再证充分性. 取 $X=e_i=(0, \cdots 0, 1\ 0 \cdots 0)$，则 $Y=XA=(a_{i1}, \cdots, a_{in})$ 由充分性假设有

$$Y\bar{Y}' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = X\bar{X}' = 1. \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

再取 $X=e_1+e_2=(1, 1, 0 \cdots 0)$，$Y=(a_{11}+a_{21}, a_{12}+a_{22}, \cdots, a_{1n}+a_{2n})$

$$Y\bar{Y}' = \sum_{k=1}^{n} (a_{1k}+a_{2k})^2 = 2+2\sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{2k} = X\bar{X}' = 2$$

$$\therefore \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{2k} = 0$$

同理可证其它两两正交. 故 $AA'=E$.

4. 正交矩阵 A 的特殊值还有哪些性质？

答　由本节内容提要知：

(1) 正交阵的特征值只可能为三种：1，-1 或 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. 而且复根两两成对. 正交阵的实特征值只能是 1 或 -1（南开大学研究生入学试题）.

(2) 由上可知，若 λ 为正交阵 A 的一个特征值，那么 $\frac{1}{\lambda}$ 也是 A 的一个特征值.

(3) 若正交阵 A 有 $|A|=-1$，则 A 有特征值 -1（华中师大研究生入学试题）．事实上，设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值，且 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n=|A|=-1$．设 λ 为 A 的复特征值，则 $\overline{\lambda}$ 也是，成对．且 $\lambda\overline{\lambda}=1$．因此，$A$ 不可能只有特征值1和成对的复特征值，否则与 $\lambda_1\cdots\lambda_n=-1$ 矛盾．

(4) 若正交阵 $|A|=1$，且 n 为奇数，则 A 有特征值 1（山东工业大学研究生入学试题）．事实上，有 $\lambda_1\cdots\lambda_n=1$，而 λ_i 中复根成对，若 A 只有复特征值和特征值 -1，又 n 为奇数，将与 $|A|=\lambda_1\cdots\lambda_n=1$ 矛盾．

（三）题型归类

1．验证正交阵

方法有两种：

(1) 利用元素之间的正交关系．

例1 设
$$A=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & a & 0\\ 0 & 0 & 1\\ b & c & 0\end{pmatrix}$$
问 a,b,c 为何值时，A 为正交阵？

解 由第1列和第1行得
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+b^2=1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+a^2$$
从而 $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$．

再由第3行 $b^2+c^2=1$ $\therefore$ $c=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$．

由第1列与第2列正交，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}a+bc=0$，所以 a,b,c 中有两个为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，另一个为 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，A 为正交阵．或者 $a=b=c=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，A 也是正交阵．

(2) 用定义验证，即验证 $A'A=E$，这是常用方法.

例2 设 A 是一个反对称实矩阵，证明 $E+A$ 和 $E-A$ 都可逆. 再令 $B=(E-A)(E+A)^{-1}$，证明 B 是正交阵.

证 由于反对称实矩阵的特征值只能是 0 或纯虚数，从而 -1 和 1 都不是特征值，即有

$$|(-1)E-A|\neq 0,\qquad |E-A|\neq 0,$$

$$|E+A|=(-1)^n|-E-A|\neq 0.$$

所以 $E-A$ 和 $E+A$ 都可逆. 另外，由 $A'=-A$，可得

$$B'B=[(E-A)(E+A)^{-1}]'[(E-A)(E+A)^{-1}]$$
$$=(E-A)^{-1}(E+A)(E-A)(E+A)^{-1}$$

但 $(E+A)(E-A)=(E-A)(E+A)$，

$\therefore$ $$B'B=E.$$

2. 利用正交变换把实二次型化为标准形，或者说用正交阵将实对称阵合同于对角阵，这在上一章已经讲过了，不再赘述.

3. 正交阵的性质

例3 （中国科学院研究生入学试题）求证不存在正交阵 A,B，有 $A^2=AB+B^2$.

证 用反证法，若有正交阵 A,B 使上式成立，那么有

$$A+B=A^2B^{-1}\quad 和\quad A-B=A^{-1}B^2$$

由于 A^2B^{-1} 和 $A^{-1}B^2$ 仍为正交阵，从而

$$E=(A+B)'(A+B)=2E+A'B+B'A,$$

$$E=(A-B)'(A-B)=2E-A'B-B'A.$$

两式相加得出 $2E=4E$，矛盾.

4. 利用正交阵特征值的性质

例4 （兰州大学研究生入学试题）设 A,B 都是 n 阶正交 $|A|+|B|=0$，证明 $|A+B|=0$.

证 由设知 $|A|=-|B|$，那么

$$|AB^{-1}|=|A|\cdot|B|^{-1}=-1$$

AB^{-1} 为正交阵，故 -1 为它的一个特征值，从而

$$0=|(-1)E-AB^{-1}|=|-B-A|\cdot|B^{-1}|$$
$$=(-1)^n|A+B|\cdot|B^{-1}|$$

故 $|A+B|=0$.

5．两个实对称阵正交相似的条件

例5 设 A,B 为实对称阵，则 A 与 B 正交相似的充要条件是 A,B 的特征值全部相同（包含重数也一致）.

证 设有正交阵 T，使 $T^{-1}AT=B$. 那么 A 与 B 的特征值都相等.

反之，设 A,B 的实特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，那么存在正交阵 T，R 使

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=R^{-1}BR,$$

$$\therefore\qquad S^{-1}AS=B$$

其中 $S=TR^{-1}$ 为正交阵.

6．正交矩阵的代数余子式.

例6 （复旦大学研究生入学试题） 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 级正交阵，证明：

$$a_{ij}=\pm(a_{ij}\text{ 的代数余子式 } A_{ij})$$

并说明如何确定其符号.

证 我们证明

$$a_{ij}=\begin{cases}A_{ij} & \text{当 } |A|=1 \text{ 时}\\ -A_{ij} & \text{当 } |A|=-1 \text{ 时}\end{cases}$$

因 $|A|=1$，由 $AA^*=|A|E$，$A^*=A^{-1}=A'$，所以 $a_{ij}=A_{ij}$. 当 $|A|=-1$ 时，$A^*=-A'$ 所以 $a_{ij}=-A_{ij}$.

7．标准正交基与正交矩阵.

例7 设 V 是 n 维欧氏空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 V 的两组基，且

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A \tag{1}$$

则 1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为标准正交基；

2) $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为标准正交基；

3) $A=(a_{ij})$ 为正交阵.

三条件中有两个成立时，另一个也必然成立.

证　先由 1)，3)$\Longrightarrow$2)：

$$(\beta_i,\beta_j)=(a_{1i}\alpha_1+\cdots+a_{ni}\alpha_n,\ a_{1j}\alpha_1+\cdots+a_{nj}\alpha_n)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj} \tag{2}$$

$$\therefore \qquad (\beta_i,\beta_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

即 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为标准正交基.

2),3)$\Longrightarrow$1)：由1)式得

$$(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\beta_1\cdots\beta_n)A^{-1}.$$

A^{-1} 为正交阵，那么由上面结论得证 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为标准正交基.

最后由1),2)$\Longrightarrow$3)：由(2)式故

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}=(\beta_i,\beta_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

所以 A 为正交阵.

8．正交变换与正交阵.

例8 设 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 为 n 维欧氏空间 V 的一组基，σ 为 V 的一个线性变换，且

$$\sigma(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A \tag{1}$$

则 1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为标准正交基；

2) A 为正交阵；

3) $\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n)$为标准正交基.

三条件中有两个成立时，那么另一个也成立. 而且这时 σ 为 V 的一个正交变换.

证 由上面例7可知三条件有两个成立，则第3个也成立，下证 σ 为正交变换.

任取 V 中两个向量

$$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n,\quad \beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n$$

$$(\alpha,\beta)=k_1l_1(\alpha_1,\alpha_1)+\cdots+k_nl_n(\alpha_n,\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}k_il_i$$

$$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=k_1l_1(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_1))+\cdots$$

$$+k_nl_n(\sigma(\alpha_n),(\sigma(\alpha_n))=\sum_{i=1}^{n}k_il_i$$

$\therefore$ $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$，$\sigma$ 为正交变换.

§2 若当标准形与弗洛扁尼斯标准形

(一) 内容提要

矩阵通常有下面三种主要标准形.

1. 等价标准形：设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则存在 m 阶与 n 阶可逆阵 P，Q 有

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}，其中 r=秩(A)$$

2. 合同标准形：

(1) 设 A 为复对称阵. 则存在复可逆阵 P，使

$$P'AP=\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}，其中 r=秩(A).$$

(2) 设 B 为实对称阵，则存在实可逆阵 Q，使

$$Q'BQ=\begin{pmatrix} E_s & & \\ & -E_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 s 为 B 的正特征值个数，t 为 B 的负特征值个数，且 $s+t=$ 秩(A).

3. 若当标准形：A 为 n 阶复方阵，则存在可逆阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$$

其中 $J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ 为 n_i 阶方阵，$i=1,2,\cdots,s$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 都是 A 的特征值，$n_1+\cdots+n_s=n$.

4. 上面 Jordan 标准形还可改述为：任意 n 阶方阵 A 一定与上（或下）三角阵相似，其对角元为 A 的全部特征值.

（二）答疑辅导

1. 矩阵的等价、合同与相似，这三者有什么关系？

答　合同一定等价，相似也等价. 反之不然，因为无论合同或相似都是对方阵而言，等价可对任意矩阵而言. 即使在方阵时，等价也不一定合同，等价也不一定相似.

合同与相似两者没有什么关系，仅当可逆阵 P 为正交阵时，有 $P'AP=P^{-1}AP$，这时相似与合同是一致的.

2. 什么叫正规阵？它的若当标准形是否为对角阵？

答　A 是 n 阶复方阵，如果满足 $\bar{A}'A=A\bar{A}'$，则称 A 为正规阵.

可以证明（辽宁大学研究生入学试题）　A 是正规阵的

充要条件是 A 与对角阵酉相似.

先证充分性. 设有酉矩阵 U, 使

$$U^{-1}AU=B,$$

B 为对角阵. 则由

$$B\bar{B}=B\bar{B}'=U^{-1}A\bar{A}'U,\ \bar{B}B=U^{-1}\bar{A}'AU,$$

$\because$ $$B\bar{B}=\bar{B}B$$

可证得 $A\bar{A}'=\bar{A}'A$, 即 A 为正规阵.

必要性　用数学归纳法证明. 当 $n=1$ 时, 结论成立, 归纳假设结论对 $n-1$ 成立. 再证 n 的情形. 设 λ_1 为 A 的一个特征值, 取 α_1 为 λ_1 的单位特征向量, 令
$U_1=(\alpha_1,\cdots)$为酉矩阵, 则

$$U_1^{-1}AU_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \alpha\\ 0 & \beta\end{pmatrix}=A_1$$

其中 $\alpha=(b_2\cdots b_n)$. 则 A_1 仍为正规矩阵, 即 $\bar{A}_1'A=A_1\bar{A}_1'$, 从而

$$\overline{\lambda_1}\lambda_1=\overline{\lambda_1}\lambda_1+\bar{b}_2b_2+\cdots+\bar{b}_nb_n$$

$\therefore$ $$b_2=b_3=\cdots=b_n=0.$$

并且 $\bar{B}'B=B\bar{B}'$. 由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶酉矩阵 V, 使 $V^{-1}BV=\mathrm{diag}(\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 令 $U_2=\begin{pmatrix}1 & \\ & V\end{pmatrix}$ 及 $U=U_1U_2$,

则 U为酉矩阵, 且

$$U^{-1}AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \tag{1}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值.

3. A 是实正规阵, 它的正交相似的标准形呢?

答　设 A 为 n 阶实正规阵, 如果讨论酉相似, 肯定还是对角阵. 现讨论正交相似, 设它的全部特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$, $\mu_1=a_1\pm b_1i,\cdots,\mu_s=a_s\pm b_si$. 其中 $r+2s=n$. 则存在

正交阵 Q，使

$$Q'AQ=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & B_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & B_s \end{pmatrix} \qquad (2)$$

其中

$$B_k=\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{pmatrix}$$

这就是实正规阵的标准形．下面来证明(2)式．

由(1)式知存在酉阵 $U=(\alpha_1\cdots\alpha_r\beta_1\overline{\beta_1}\cdots\beta_s\overline{\beta_s})$ 使得

$$U^{-1}AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\mu_1,\overline{\mu_1},\cdots,\mu_s,\overline{\mu_s})$$

其中

$$A\alpha_k=\lambda_k\alpha_k, \alpha_k \text{ 为实向量．} \quad (k=1,2,\cdots r),$$

$$A\beta_j=\mu_j\beta_j, \quad A\overline{\beta_j}=\overline{\mu_j}\ \ \overline{\beta_j} \qquad (j=1,2\cdots s)$$

取

$$\gamma_1=\frac{\beta_1+\overline{\beta_1}}{\sqrt{2}}, \quad \gamma_2=\frac{\beta_1-\overline{\beta_1}}{\sqrt{2}i}$$

则 γ_1，γ_2 为实向量．且

$$A\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(A\beta_1+A\overline{\beta_1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu_1\beta_1+\overline{\mu_1}\overline{\beta_1})=a_1\gamma_1-b_1\gamma_2,$$

$$A\gamma_2=b_1\gamma_1+a_1\gamma_2$$

由于 U 是酉矩阵，可以验证：

$$\gamma'_1\gamma_1=1,\ \gamma'_2\gamma_2=1,\ \gamma'_i\beta_j=0,\ \overline{\beta}'_j\gamma_i=0.$$

类似处理其它成对的 $\mu_k,\overline{\mu_k}$ 和 β_k，$\overline{\beta_k}$．从而存在正交阵

$$Q=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{2s-1}\ \gamma_{2s})$$

使得

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & B_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & B_s \end{pmatrix}$$

4. 正交阵 A 的三种标准形怎样？

答 由于 $|A|=\pm1$，因此 A 等价的标准形为 E.

由于 $AA'=A'A$，A 是正规阵，则 A 酉相似于对角阵(武汉大学研究生入学试题），且对角线元素为它的特征值：1，-1或 $\cos\theta+\sin\theta$.

如果要求 A 的实相似的标准形，则把 A 看成实正规阵，由上一命题知，存在正交阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ=Q'AQ=\begin{pmatrix} E_r & & & & \\ & -E_s & & & \\ & & B_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_t \end{pmatrix}$$

其中

$$B_k=\begin{pmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}, (k=1,2,\cdots,t)$$

$r+s+2t=n$.

5. 什么叫弗洛扁尼斯块？它的不变因子是什么？特征多项式呢？

答 在p.96第3章§5中曾介绍过，形如

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix} \quad (1)$$

的 m 阶方阵 F 称为弗洛扁尼斯块.

$$\lambda E-F=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_{m-1} \end{vmatrix}$$

不难求出不变因子为 $1,\cdots,1,d_m(\lambda)$，其中

$$d_m(\lambda)=|\lambda E-F|=\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0 \quad (2)$$

为 F 的特征多项式，有些书上称(1)式为弗洛扁尼斯块 F 的友阵. 且 $\lambda E-F$ 等价于 $\mathrm{diag}(1,\cdots,1,d_m(\lambda))$.

6. 什么叫弗洛扁尼斯标准形？

答　设 $M=\mathrm{diag}(F_1,F_2,\cdots,F_s)$，其中每个 F_k 为弗洛扁尼斯块，则称 M 为弗洛扁尼斯阵.

可以证明：任何方阵 A 必相似于某一弗洛扁尼斯阵.

事实上，设 n 阶方阵 A 有不变因子为

$$1,\cdots,1,d_{k+1}(\lambda),\cdots,d_n(\lambda) \quad (3)$$

其中 $d_i(\lambda)\neq 1$ $(i=k+1,\cdots,n)$. 令 $d_i(\lambda)$的友阵为 F_i，且 $M=\mathrm{diag}(F_{k+1},\cdots,F_n)$. 则 $\lambda E-M$ 等价于

$$\mathrm{diag}(1,\cdots,1,d_{k+1}(\lambda),\cdots,1,\cdots,1,d_n(\lambda)),$$

从而 $\lambda E-M$ 也等价于

$$\mathrm{diag}(1,\cdots,1,d_{k+1}(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)).$$

那么 A 与 M 有相同的不变因子，所以 $A\sim M$.

（三）题型归类

1. 讨论矩阵的等价、合同、相似

例 1（浙江大学研究生入学试题）　设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

问 B，C，D 中（要说明理由）

1）哪些与 A 等价；

2）哪些与 A 合同；

3）哪些与 A 相似.

解　1）B，C，D 均与 A 等价，因为它们之秩都等于 3.

2）B 与 A 不合同，因为 A 是对称阵，而 B 不是对称阵. 令

$$X=\begin{pmatrix}&&\sqrt{2}\\&\frac{1}{\sqrt{2}}&\\1&&\end{pmatrix},\quad Y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&1\\\sqrt{2}&\sqrt{2}&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

则

$$C=XAX',\quad A=YDY'$$

因此 C，D 与 A 合同.

3）A 与 B 不相似，因为 $|A|\neq|B|$. A 与 C 也不相似，因为初等因子不同.

A 与 D 相似，因为初等因子相同.

例 2（吉林工业大学，江西师院研究生入学试题）　证明所有 n 阶 $n-1$ 次幂零阵彼此相似.

证　设 A 为幂零阵，且满足

$$A^{n-1}=0,\ A^{k}\neq 0\ (k<n-1) \tag{1}$$

由(1)式知 A 的最小多项式 $d_n(\lambda)=\lambda^{n-1}$. 从而

$$d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-2}(\lambda)=1,\ d_{n-1}(\lambda)=\lambda \qquad (2)$$

由此可知，任意 n 阶 $n-1$ 次幂零阵都具有相同的不变因子 $1,\cdots,1,\lambda,\lambda^{n-1}$. 故彼此相似.

2. 求若当标准形

例 3 （四川师大研究生入学试题） 求

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的若当标准形.

解

$$\lambda E-C=\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

由于 $\lambda E-C$ 的右上角有一个 3 阶子式为

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \end{vmatrix}=-4(\lambda+1)\lambda,$$

而

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^3.$$

所以 $D_3(\lambda)=1$，这样可知

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,\ d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4.$$

初等因子为 $(\lambda-1)^4$，故 C 的若当标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3．求变换矩阵

例4 （复旦大学研究生入学试题） 设

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ -12 & 3 & 8 \\ -6 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

已知它的三个特征根为 1,1,1，试将 A 表成 $A=PJP^{-1}$，其中 J 是 A 的若当标准形，P是变换矩阵，求 J,P 和 P^{-1}.

证 由题设知$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^3$，从而 A 的最小多项式只能是 $\lambda-1$，$(\lambda-1)^2$ 或 $(\lambda-1)^3$．经验算知最小多项式 $d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2$．从而 $d_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=\lambda-1$，故

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

设 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，由 $P^{-1}AP=J$，则

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

那么，先求出 $\lambda=1$ 的一个特征向量为$(1,6,0)$．令

$$P=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_4 \\ 6 & x_2 & x_5 \\ 0 & x_3 & x_6 \end{pmatrix}$$

由 $AP=PJ$，解出

$$x_1=x_4=x_6=1,\quad x_2=-1,\quad x_3=x_5=2,$$

所以

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\6 & -1 & 2\\0 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 3\\-6 & 1 & 4\\12 & -2 & -7\end{pmatrix}.$$

4．弗洛扁尼斯标准形

例5 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 3\\-2 & 6 & 0 & 13\\0 & -3 & 1 & 3\\-1 & 2 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

求 A 的弗洛扁尼斯标准形与若当标准形.

解 先求出 $\lambda E-A$ 的不变因子为

$$1,\ 1,\ \lambda-1,$$

$$\lambda^3-15\lambda^2+23\lambda-19=(\lambda-1)(\lambda-7+\sqrt{30})(\lambda-7-\sqrt{30})$$

故 A 的若当标准形为

$$\mathrm{diag}(1,1,7+\sqrt{30},7-\sqrt{30}).$$

A 的弗洛扁尼斯标准形为 $\mathrm{diag}(F_1,F_2)$，其中

$$F_1=(1),\quad F_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 19\\1 & 0 & -33\\0 & 1 & 15\end{pmatrix}$$

5．凯莱定理的另一证明

例6 （北师大研究生入学试题） 令 A 是复数域上 n 阶方阵.

1）证明：A 相似于一个上三角阵

2）令 $f(\lambda)$是 A 的特征多项式，证明 $f(A)=0$（不许用凯莱定理）

证 1）由若当标准形即得证明.

2) 设 $A=T^{-1}\operatorname{diag}(J_1,\cdots,J_s)T$ (1)

其中

$$J_k=\begin{pmatrix}\lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k\end{pmatrix} \qquad (k=1,2,\cdots,s)$$

为 $n_k\times n_k$ 若当块．故

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s} \tag{2}$$

由（1）式知

$$(A-\lambda_1 E)^{n_1}=T^{-1}\operatorname{diag}(0,*,\cdots,*)T$$

$$(A-\lambda_2 E)^{n_2}=T^{-1}\operatorname{diag}(*,0,\cdots,*)T$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(A-\lambda_s E)^{n_s}=T^{-1}\operatorname{diag}(*,\cdots,0)T$$

将它们相乘得

$$f(A)=(A-\lambda_1 E)^{n_1}\cdots(A-\lambda_s E)^{n_s}$$
$$=T^{-1}\operatorname{diag}(0,\cdots,0)T=0.$$

§3 矩阵可对角化的条件

（一）内容提要

1．设 A 是 n 阶方阵，则 A 与对角阵相似的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量．

2．设 A 是 n 阶方阵，且 A 有 n 个不同的特征值，那么 A 与对角阵相似．

3．方阵 A 与对角阵相似的充要条件是 A 的初等因子都是一次的．

4．设方阵 A 的特征多项式可分解为：

$$|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s} \tag{1}$$

令

$$\dim V_{\lambda_i}=t_i \quad (i=1,\cdots,s).$$

则 A 与对角阵相似的充要条件是 $r_i=t_i$ $(i=1,\cdots\cdots s)$. 换句话说，几何重数都等于代数重数.

5. 设 A 的特征多项式由 (1) 式给出，则 A 与对角阵相似的充要条件为

$$\text{秩}(\lambda_i E-A)=n-r_i, \quad (i=1,\cdots,s).$$

这里 r_i 是 λ_i 的重数.

6. A 与对角阵相似的充要条件是对任意 ω，有

$$\text{秩}(\omega I-A)=\text{秩}(\omega I-A)^2.$$

7.（厦门大学，新乡师院研究生入学试题） A 与对角阵相似的充要条件是对 A 的任意特征值 λ，有

$$\text{秩}(\lambda I-A)=\text{秩}(\lambda I-A)^2.$$

8. A 与对角阵相似的充要条件是，对任意数 ω，下面两方程组同解：

$$(\omega I-A)X=0 \text{ 与 } (\omega I-A)^2X=0.$$

9. A 与对角阵相似的充要条件是，对 A 的任意特征值 λ，下面两方程组同解：

$$(\lambda I-A)X=0 \text{ 与 } (\lambda I-A)^2X=0.$$

10. 设 A 是 n 阶方阵，$V=C^{n\times 1}$ 是 n 维复向量空间，则 A 与对角阵相似的充要条件是，对任意数 λ，有

$$(\lambda I-A)V\cap(\lambda I-A)^{-1}(0)=\{0\},$$

其中 $(\lambda I-A)V=\{(\lambda I-A)\alpha\,|\,\alpha\in V\}$,

$$(\lambda I-A)^{-1}(0)=\{\alpha\,|\,(\lambda I-A)\alpha=0\},$$

或 $(\lambda I-A)^{-1}(0)=\{\alpha\,|\,A\alpha=\lambda\alpha\}$.

11. A 与对角阵相似的充要条件是，对 A 的每一个特征值 λ，有

$$(\lambda I-A)V\cap(\lambda I-A)^{-1}(0)=\{0\}.$$

12. (华东师大，福州大学研究生入学试题) A 与对角阵相似的充要条件是它的最小多项式无重根，即

$$(d_n(\lambda),\ d'_n(\lambda))=1.$$

13. 设 $g(\lambda)$为 A 的零化多项式，且

$$(g(\lambda),g'(\lambda))=1$$

则A 与对角阵相似.

14. 设 $f(\lambda)=|\lambda I-A|$，$d_n(\lambda)$ 为 A 的最小多项式，则 A 与对角阵相似的充要条件是

$$d_n(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{(f(\lambda),f'(\lambda))}$$

成立.

15. 设 A 是 n 级对称矩阵，则存在 n 级正交矩阵 V，使得

$$V'AV=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值.

以上命题的证明，有兴趣读者，可见参考文献[15].

（二）答疑辅导

1. 设 A 可对角化，怎样求 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵?

答　求 P 的方法一般有 2 种

1) 先求 A 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ (可能有相同的)，再求相应的 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，令 $P=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$则 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

2) 也可以用解方程组的办法. 举一个例子. 设

$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，求出 A 的特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$. 再设

$P=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，则由 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(-1,3)$ 可得

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$$

可得解 $x_1=1, x_2=1, x_3=-1, x_4=1$，则 $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$.

2．上述 P 是否唯一？

答　不是唯一的．比如上面例子中令 $R=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$则 $R^{-1}AR=\mathrm{diag}(3,-1)$.

再比如 A 是 4×4 矩阵，设 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=\lambda_4=-1$，其相应的 4 个线性无关的特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，则令
$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$R=(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)$，$S=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_3)$，$T=(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_4,\alpha_3)$，都有

$$P^{-1}AP=R^{-1}AR=S^{-1}AS=T^{-1}AT=\mathrm{diag}(2,2,-1,-1).$$

3．能否用初等变换把 A 化为相似对角形？

答　可以，但不简便．因为 $P=E_1E_2\cdots E_m$ 时，$P^{-1}=E_m^{-1}\cdots E_1^{-1}$，于是 $P^{-1}AP=E_m^{-1}\cdots E_1^{-1}AE_1\cdots E_m$，但 $E_1^{-1}AE_1$ 远不及 $E_1'AE_1$ 简便，故不便使用初等变换．

4．相似矩阵有哪些主要性质？

答　性质很多，不可能全部列举，常用的有以下几条，感兴趣读者可以自己证明：

1）$A\sim B$ 则 $f(A)\sim f(B)$，其中 $f(x)$ 为任意多项式．

2）$A\sim B$ 则 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，即特征多项式相等．此性质之逆并不成立．

3）$A=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_m)$，$B=\mathrm{diag}(B_1,B_2,\cdots,B_m)$，且 $A_i\sim B_i(i=1,2,\cdots,m)$ 则 $A\sim B$.

4）A 是 n 阶方阵，则 $A\sim A'$.

5）设 A 是 n 阶可逆阵，则下面三个条件是等价的：

i）$A\sim\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$；

ii) $A^{-1}\sim\text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}\right)$;

iii) $A^*\sim\text{diag}\left(\frac{|A|}{\lambda_1},\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}\right)$.

i)与 ii)等价是容易的.我们证明 i)与 iii)等价.

设 $A=T^{-1}\text{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)T$，由于 $A^*=|A|A^{-1}$，则

$A^{-1}=T^{-1}\text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}\right)T$ $\quad\therefore\quad A^*=T^{-1}\text{diag}\left(\frac{|A|}{\lambda_1},\right.$ $\left.\cdots,\frac{|A|}{\lambda_n}\right)T$.

反之,设 $A^*=S^{-1}\text{diag}(a_1,\cdots,a_n)S$,由于 $A=|A|(A^*)^{-1}$ 则

$$(A^*)^{-1}=S^{-1}\text{diag}\left(\frac{1}{a_1},\cdots,\frac{1}{a_n}\right)S.$$

$$A=S^{-1}\text{diag}\left(\frac{|A|}{a_1},\cdots,\frac{|A|}{a_n}\right)S.$$

6) $A\sim\text{diag}(B_1,\cdots,B_s)$，$f_i(\lambda)$为 B_i 的特征多项式，$f(\lambda)$为 A 的特征多项式，则 $f(\lambda)=f_1(\lambda)\cdots f_s(\lambda)$.

7) $A\sim\text{diag}(B_1,\cdots,B_s)$，则 A 的最小多项式为 B_1，B_s 为最小多项式的公倍式

8) 设 $P^{-1}AP=\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，其中 $P=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 分别为 A 属于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量.

任意 n阶方阵A,在复数域中均相似于一个上（或下）三角阵，其对角线元是A的 n 个特征值.

(三) 题型归类

1. 判断矩阵是否与对角阵相似.

主要利用本节内容提要的一些方法，其中用得最多的有

以下几种：

(1) 利用零化多项式无重根

例1 （新疆大学研究生入学试题） 设 A 是 n 阶复数方阵，且有正整数 m，使 $A^m=E$，证明：

1）A 与对角阵相似；

2）A 的所存特征根都是 m 次单位根.

证 1）由 $A^m=E$ 知 A 有零化多项式 $g(x)=x^m-1$ 但 $g(x)$ 无重根，故 A 相似于对角阵.

2）再设 λ 是 A 的任一特值根，由 $A^m=E$，则 $\lambda^m=1$，即证 λ 为 m 次单位根.

(2) 利用特征值特征向量

例2 （日本东京工业大学研究生入学试题）

1）试求 $A=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -4 & 5\end{pmatrix}$的特征值，特征向量；

2）试求 $C^{-1}AC$ 成为对角阵的满秩矩阵 C；

3）试求 A^{2n} （n 是整数）

解 1）$|\lambda E-A|=\lambda^2-1$，则 A 的特征值为 1，-1. 再求出属于特征值 1 和 -1 的特征向量为 $\alpha=(1,\ 1)'$，$\beta=(3,\ 2)'$.

2）令 $C=(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，则 $C^{-1}AC=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$.

3）$(C^{-1}AC)^{2n}=E$，$\therefore\ A^{2n}=E$.

(3) 利用若当标准形

例3 （东北工学院研究生入学试题） 若方阵 $A\neq 0$，$A^k=0$ （k 为某一正整数）则 A 不能相似于对角阵.

证 由假设知 A 的特征值全为 0. 则

$$A=T^{-1}\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_s)T$$

其中

$$J_i=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}$$

为 n_i 阶若当块($i=1,2\cdots s$). 由于 $A\neq0$,故至少有一个 $n_i\neq1$. 从而 A 不能相似于对角阵.

(4) 利用最小多项式

例 4 (黑龙江大学研究生入学试题) 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -9 & -12\\ 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

能否相似于对角阵 D? 如果可能, 试求出 D, 并求出使 $T^{-1}AT=D$ 的可逆阵 T.

解

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda+3 & 9 & -12\\ -1 & \lambda-3 & 4\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}$$

其中有两个子式互素

$$\begin{vmatrix}\lambda+3 & 9\\ -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2,\qquad \begin{vmatrix}\lambda-3 & 4\\ 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

故 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1$, $d_3(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-1)$.

A 的最小多项式 $d_3(\lambda)$ 有重根, 故 A 不相似于对角阵.

2. 证明两矩阵相似

例 5 (同济大学研究生入学试题) 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 1\\ \alpha & 1 & \beta\\ 1 & \beta & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

相似.

1）求 α，β

2）求正交阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

解　1）因 $A\sim B$，所以 $|A|=|B|$，解得 $\alpha=\beta$. 再算出

$$|\lambda E-A|=\lambda^3-3\lambda^2+2(1-\alpha^2)\lambda,$$

$$|\lambda E-B|=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda.$$

但它们有相同的特征多项式，则 $\alpha=0$.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

再求出 A 的属于 0，1，2 的 3 个单位特征向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

令 $P=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ 则

$$P^{-1}AP=B=\mathrm{diag}(0,1,2).$$

例 6（复旦大学研究生入学试题）$n\times n$ 实矩阵 A 和 B，证明：A 和 B 实相似的充要条件是 A 与 B 复相似.

证　必要性显然，下证充分性. 设 A 与 B 复相似，即存在复可逆阵 $T=R+iQ$，使 $B=T^{-1}AT$，其中 R 和 Q 都是 n 阶实方阵. 由 $TB=AT$，得

$$AR=RB,\ AQ=QB. \tag{1}$$

再 $|T|=|R+iQ|\neq 0$，故 $|R+\lambda Q|$ 不是零多项式，因此在复数域上仅有有限个根. 从而存在实数 a，使 $|R+aQ|\neq 0$，令 $P=R+aQ$，使 P 为实可逆阵，再由 (1) 式得

$$AP=AR+aAQ=RB+aQB=PB,$$
$$P^{-1}AP=B.$$

§4　矩阵分解

（一）内容提要

矩阵分解是指一个已知矩阵分解为若干个满足一定条件的矩阵之积或和.

等价分解　设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，则存在可逆阵 P 和 Q，使得

$$A=P\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q$$

（二）答疑辅导

1．什么叫满秩分解?

满秩分解（兰州大学研究生入学试题）　设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩是 $r>0$，则存在 $m\times r$ 列满秩矩阵 G，$r\times n$ 行满秩矩阵 H，使得 $A=GH$.

事实上，存在 m 阶和 n 阶可逆阵 P,Q，使得

$$A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}E_r\\ 0\end{pmatrix}(E_r,0)Q$$
$$=GH,$$

其中 $G=P\begin{pmatrix}E_r\\ 0\end{pmatrix}$，$H=(E_r,0)$．而且

$$秩(G)=r=秩(H).$$

3．什么叫极分解?

极分解（华中师大，南京大学，东北师大研究生入学试题）任一实满秩阵 A，都可以分解为 $A=BC$，其中 B 为正定阵，

C 为正交阵，或 B 为正交阵，C 为正定阵.

事实上，A 满秩，则 AA' 正定，从而存在正定阵 B，使得 $AA'=B^2$. 令 $C=B^{-1}A$，则 $A=BC$. 而

$$CC'=B^{-1}AA'B^{-1}=E,$$

即证 C 为正交阵.

另一同理可证.

4. 什么叫 QR 分解?

QR 分解 任一实满秩阵 A，都可分解为一个正交阵与一个主对角线元都大于 0 的上三角阵之积.

事实上由于 A 的列向量线性无关，用 Schmidt 正交化过程知 $A=BC$，其中 B 为正交阵，C 为主对角线元都大于 0 的上三角阵.

5. 什么叫双三角分解?

双三角分解 设 A 是正定阵，则 $A=B'B$，其中 B 为主对角线元全为正的上三角阵.

事实上，由 A 正定，则 $A=CC'$，其中 $|C|\neq 0$. 由 QR 分解，则 $C'=QB$，其中 Q 为正交阵，B 为主对角线元全为正的上三角阵，则

$$A=CC'=(QB)'(QB)=B'B.$$

这样的分解也是唯一的.

6. 什么叫双对称分解（Voss）?

双对称分解（华东师大，中山大学研究生入学试题）任意复方阵 A，都可表为两个对称阵之积，其中至少有一个为可逆阵.

事实上，由 Jordan 定理知，存在可逆阵 P 使 $A=P^{-1}JP$ 其中 $J=diag(J_1,J_2,\cdots,J_s)$ 为准对角阵. 且

$$J_k=\begin{pmatrix}\lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_k\end{pmatrix}=Q_kR_k \qquad (k=1,2,\cdots,s)$$

其中 $Q_k=\begin{pmatrix} & & 1 & \lambda_k\\ & ⋰ & ⋰ & \\ 1 & ⋰ & & \\ \lambda_k & & & \end{pmatrix}$， $R_k=\begin{pmatrix} & & 1\\ & ⋰ & \\ 1 & & \end{pmatrix}$与 J_k 为同级方阵.

不难验证 Q_k，R_k 均为对称阵. 且 R_k 为可逆阵，所以

$$J=[Q_1,Q_2,\cdots,Q_s][R_1,R_2,\cdots,R_s]=BC$$

其中 $B=[Q_1,\cdots,Q_s]$，$C=[R_1,\cdots,R_s]$为对准角阵.

$$\therefore \qquad A=(PBP')((P')^{-1}CP^{-1})$$

PBP' 与$(P^{-1})'CP^{-1}$ 均为对称阵，且后者可逆.

7．什么叫奇异值分解？

奇异值分解(天津师大研究生入学试题) 设 A 为 $n\times m$ 实矩阵，则存在 n 阶正交阵 Q 和 m 阶正交阵 P，使得

$$A=P\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q'.$$

其中 $D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_r)$，$r=$秩$(A)$， $d_i>0(i=1,2\cdots r)$

事实上，由于 AA' 半正定，从而存在 m 阶正交阵 P，使得

$$AA'=P\,\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\cdots,\lambda_m^2)P', \tag{1}$$

由于秩$(A)=$秩$(AA')=r=$秩$(\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\cdots,\lambda_m^2))$. 不失一般性，设

$$\lambda_1^2\geqslant\lambda_2^2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_r^2>0,\quad \lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_m=0.$$

令 $d_i=|\lambda_i|\quad(i=1,2,\cdots,r)$，由(1)式得

$$P'AA'P=\mathrm{diag}(D^2,\ 0) \tag{2}$$

将 P 分块，令 $P=(P_1,P_2)$，由(2)式

$$AA'=(P_1,\ P_2)\mathrm{diag}\,(D^2,\ 0)\begin{pmatrix}P_1'\\ P_2'\end{pmatrix}=P_1D^2P \tag{3}$$

由于 P 为正交阵，$P_1'P_1=E_r$，用 P_1' 左乘，P_1 右乘(3)式两端得

$$P_1'AA'P_1=D^2.$$

令 $V_1'=D^{-1}P_1'A$，则 V_1 为 $r\times m$ 矩阵，且

$$V_1'V_1=(D^{-1}P_1'A)(D^{-1}P_1'A)'=E_r$$

因为 $PP'=E$，可得 $P_1P_1'+P_2P_2'=E$，因而

$$(E-P_2P_2')A=P_1P_1'A=P_1DD^{-1}P_1'A=P_1DV_1'$$

$$A=P_1DV_1'+P_2P_2'A \tag{4}$$

由于秩$(P'A)=r$，$P'Ax=0$ 有 $m-r$ 个线性无关的解，将它们正交化后，构成 $m\times(m-r)$矩阵 V_2，这样

$$P_1'AV_2=0,\ P_2'AV_2=0,\ V_2'V_2=E, \tag{5}$$

令 $Q=(V_1,\ V_2)$，由于 $V_1'V_2=D^{-1}P_1'AV_2=0$，从而 Q 为正交阵，且由(3)式知

$$0=P_2'AV_1=P_2'AA'P_1D^{-1},$$

由(4)式

$$P'AQ=\begin{pmatrix}P_1'\\P_2'\end{pmatrix}(P_1DV_1'+P_2P_2'A)(V_1V_2)=\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\qquad A=P\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}Q$$

8. 什么叫谱分解?

谱分解 设 $A_{n\times n}$ 与对角阵相似，则

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i\beta_i'$$

$$\beta_i'\alpha_j=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}.$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的全部特征值(称为谱)，α_i 为 A 关于 λ_i 的特征向量，β_i 为 A' 关于 λ_i 的特征向量.

事实上，由假设存在可逆阵 $T=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，使得

$$A=T\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)T^{-1}$$

令 $(T^{-1})'=(\beta_1\cdots\beta_n)$，那么

$$\begin{aligned}A&=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)(\beta_1\cdots\beta_n)'\\&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i\beta_i'.\end{aligned}$$

由 $E=T^{-1}T=(\beta_1\cdots\beta_n)'(\alpha_1\cdots\alpha_n)$，可得

$$\beta_i'\alpha_j=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}.$$

由 $AT=T\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，即

$$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i\quad(i=1,2,\cdots n),$$

α_i 为 A 关于 λ_i 的特征向量.

$$A'=(T^{-1})'\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots\lambda_n)T',$$

$$A'(T^{-1})'=(T^{-1})'\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

$$\therefore\quad A'\beta_i=\lambda_i\beta_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

β_i 为 A' 关于 λ_i 的特征向量.

注 当 A 为实对称阵时，则 A 的谱分解式为

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i\alpha_i'$$

其中 α_i 为 A 关于 λ_i 的特征向量.

因为当 A 是实对称时，T 为正交阵，$T=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$，$T^{-1}=T'=(\alpha_1\cdots\alpha_n)'$. 即上面的 $\beta_i'=\alpha_i'(i=1,2,\cdots,n)$.

9. 什么叫幂零对角分解？

幂零对角分解（浙江大学，华中师大研究生入学试题）设 A 为 n 阶方阵，则 $A=B+C$，其中 B 相似于对角阵，C 为幂零阵，且 $BC=CB$.

事实上，由 Jordan 分解知 $A=T^{-1}JT$，其中 $J=\mathrm{diag}(J_1\cdots$

J_s)J_i 为主对角线之为 λ_i 的上三角若当块，令

$$C_i = J_i - \lambda_i E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

不难证明，存在 k 使

$$C_i^k = 0 \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

故 C_i 为幂零阵. 令 $C = T^{-1}\text{diag}(C_1,\cdots,C_s)T$，那么 C 也是幂零阵.

再令 $B = T^{-1}\text{diag}(\lambda_1 E_1,\ \cdots.\ \lambda_s E_s)T$，则 B 相似于对角阵，且 $B+C=A$,

$$BC = CB = T^{-1}\text{diag}(\lambda_1 C_1,\cdots,\lambda_s C_s)T.$$

（三）题型归类

1．矩阵分解的应用

例 1 （成都科学分院，甘肃工业大学研究生入学试题）设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，证明

1）存在非奇异矩阵 P，使 PA 的后 $m-r$ 行全为零；

2）存在非奇异矩阵 Q，使 AQ 的后 $n-r$ 列全为零.

证 由假设和等价分解，则存在非奇异阵 P 和 Q，使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1）$$PA = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2）$$AQ = P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (P_1,\ P_2)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (P_1, 0)$$

2．其它分解

例 2 （山东师大，东北师大研究生入学试题） 设 A 为 n 阶正定阵，则可找到一个可逆的实对称阵 B，使 $A=B^2$.

证明见P.238第七章§3答疑辅导1.

3. 计算分解

例 3 （南开大学研究生入学试题） 将

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

分解为 $A=QR$，其中 Q 为正交阵，R 为上三角阵.

解 令 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，其中 α_i 为 A 的列向量，用 Schmidt 正交化方法. 令

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & -1 & -\frac{5}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{|\beta_1|} & & \\ & \frac{1}{|\beta_2|} & \\ & & \frac{1}{|\beta_3|}\end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{\sqrt{6}}{5}\end{pmatrix}$$

其中

$$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

为正交阵，则

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$

$$=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{\sqrt{6}}{5}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -1 & -\frac{5}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=QR.$$

其中

$$R=\left(\begin{pmatrix}1 & -1 & -\frac{5}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{\sqrt{6}}{5}\end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{3} & \frac{5}{\sqrt{3}}\\ 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

为上三角阵.

§5 综合题

例 1 实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 的矩阵 A 非异，证明：f 可用正交变换化为规范形的充要条件是 A 为正交阵.

证 必要性 设 f 经正交变换 $X=TY$ 化为规范形 $Y'BY$，其中 $B=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots-1)$. 则

$$B=T'AT,\quad A=TBT'.$$

$$A'A=TB'T'TBT'=TET'=E.$$

即 A 为正交阵.

充分性　A 是正交阵，又是对称阵，则

$$A^2=A'A=E$$

从而 A 的特征值只能是 1 或 -1. 从而存在正交阵 T，使 $T'AT=\mathrm{diag}(1,\cdots 1,-1,\cdots,-1)$. 则令 $X=TY$.

$$f=(TY)'A(TY)=Y'\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots-1)Y$$

即为规范形.

例 2　设 $B=\begin{pmatrix}7 & 4\\ -9 & -5\end{pmatrix}$，求 B^n(n 为正整数).

解　求出 B 的不变因子为 1，$(\lambda-1)^2$，则 B 的若当标准形为 $J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. 设可逆阵 $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$$P^{-1}BP=J \quad 或 \quad BP=PJ \tag{1}$$

由(1)式 B，J 已知，解线性方程组求出一组解

$$a=-2,\ b=-1,\ c_3=3,\ d=1$$

$$P=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$B^n=PJ^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}6n+1 & 4n\\ -9n & 1-6n\end{pmatrix}.$$

例 3　设 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$为实方阵，则它一定相似于下列矩阵之一：

$$B=\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \lambda\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}\lambda & \\ & \mu\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda & \beta\\ -\beta & \lambda\end{pmatrix}=F$$

其中 λ，μ，β 均为实数.

证　设 A 的若当标准形为 J. 当 A 有两个相同实根时，

则 $J=B$ 或 $J=C$.

当 A 有两个不等实根时，$J=D$.

当 A 有两个复特征根 λ_1,λ_2 时，则

$$\lambda_1=\lambda+i\mu,\quad \lambda_2=\lambda-i\mu$$

其中 λ，μ 为实数. 设 α 为 A 属于 λ_1 的复特征向量，则 $\bar{\alpha}$ 是 A 属于 λ_2 的特征向量. 再令

$$\beta=\alpha+\bar{\alpha},\quad \gamma=\frac{1}{i}(\alpha-\bar{\alpha}) \tag{1}$$

则 β，γ 均为实向量，由于 α，$\bar{\alpha}$ 线性无关，则 β，γ 也线性无关. 且

$$\begin{aligned}A\beta&=A\alpha+A\bar{\alpha}=\lambda_1\alpha+\lambda_2\bar{\alpha}\\&=\lambda(\alpha+\bar{\alpha})+\mu i(\alpha-\bar{\alpha})\\&=\lambda\beta-\mu\gamma,\end{aligned} \tag{2}$$

$$A\gamma=\mu\beta+\lambda\gamma. \tag{3}$$

$$\therefore\qquad A(\beta,\ \gamma)=(\beta,\gamma)\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ -\mu & \lambda\end{pmatrix},$$

令
$$P=(\beta,\gamma),$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ -\mu & \lambda\end{pmatrix}.$$

例 4 （日本早稻田大学研究生入学试题） 设 n 阶复正规阵 $A=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

$$\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2=\sum_{j,k=1}^{n}|a_{jk}|^2.$$

证 A 是正规阵，由p.264本章§2答疑辅导2的正规阵的标准形知，存在酉矩阵 U，则

$$U^{-1}AU=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n).$$

$$\begin{aligned}U^{-1}\bar{A}'AU&=(U^{-1}\bar{A}'U)(U^{-1}AU)\\&=\operatorname{diag}(\bar{\lambda}_1\lambda_1,\cdots,\bar{\lambda}_n\lambda_n)\end{aligned}$$

$$=\operatorname{diag}(|\lambda_1|^2,\cdots,|\lambda_n|^2)$$

$$\therefore\quad \sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2=\operatorname{tr}(U^{-1}\bar{A}'AU)=\operatorname{tr}\bar{A}'A$$

$$=\sum_{j,k=1}^{n}|a_{jk}|^2.$$

例 5 （吉林大学研究生入学试题） A 为正交阵，$\alpha+i\beta$ 为 A 的特征值，$x+iy$ 为相应的特征向量，证明：

1）$\alpha^2+\beta^2=1$；

2）当 $\beta\neq 0$ 时，$x'y=0$，$x'x=y'y$。

证 1）由正交阵特征值的模等于1，即证 $\alpha^2+\beta^2=1$.

2）仿上题可证(即(2)，(3)式)

$$Ax=\alpha x-\beta y,\quad Ay=\alpha y+\beta x$$

$$x'x=x'A'Ax=(\alpha x'-\beta y')(\alpha x-\beta y)$$

$$=\alpha^2x'x+\beta^2y'y-2\alpha\beta x'y$$

由$\alpha^2+\beta^2=1$，$\beta\neq 0$则

$$-\beta x'x+\beta y'y=2\alpha\beta x'y \tag{1}$$

再

$$x'y=(\alpha x'-\beta y')(\alpha y+\beta x)$$

$$=\alpha^2x'y+\alpha\beta x'x-\alpha\beta y'y-\beta^2x'y$$

$$\alpha\beta x'x-\alpha\beta y'y=2\beta^2x'y \tag{2}$$

$\alpha\times(1)+(2)$，得，$x'y=0$.

再代入(1)式，得$x'x=y'y$.

例6 （湘潭大学研究生入学试题）设复矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\a&2&0\\b&c&-1\end{pmatrix},$$

问矩阵A可能有什么样的若当标准形？并求A相似于对角阵的充要条件.

解 A的若当标准形只有两种：

$$J=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \text{或} J=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}$$

A相似于对角阵$\Longleftrightarrow A$有不变因子$1,\lambda-2,(\lambda-2)(\lambda+1)$

则

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-2&0&0\\-a&\lambda-2&0\\-b&-c&\lambda+1\end{pmatrix}$$

由于$D_2(\lambda)=\lambda-2$,所以必须

$$\begin{vmatrix}-a&\lambda-2\\-b&-c\end{vmatrix}=ac+b(\lambda-2)=k(\lambda-2),$$

$$\begin{vmatrix}-a&0\\-b&\lambda+1\end{vmatrix}=0$$

$$a=0,$$

即A相似于对角阵的充要条件是$a=0$.

例7 （武汉大学研究生入学试题） 设A为实满秩阵，求证：存在正交阵P,Q使

$$P^{-1}AQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots\lambda_n)$$

其中$\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.

证 A满秩，则AA'为正定阵，存在正交阵P,使

$$P'(AA')P=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)$$

其中$\mu_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.再令 $\lambda_i=\sqrt{\mu_i}>0$.

$$C=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

$$P'AA'P=C^2$$

再令$Q=A'PC^{-1}$,则

$$Q'Q=C^{-1}P'AA'PC^{-1}=E$$

即Q为正交阵. $P^{-1}AQ=P'A(A'PC^{-1})=C^2C^{-1}=C$.

第九章 线性变换

§1 定义与性质

（一） 内容提要

1．设σ是线性空间V的一个变换，如果满足条件：

(1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\forall\alpha,\beta\in V$；

(2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha),k\in P.\alpha\in V$

则称σ是V的一个线性变换.

2．设σ是线性空间V的一个线性变换，则σ是线性变换$\Longleftrightarrow$对$\forall\alpha,\beta\in V,k\in P$,有

$$\sigma(k\alpha+l\beta)=k\sigma(\alpha)+l\sigma(\beta).$$

3．设σ_1,σ_2是V的两个线性变换，则

(1) $(\sigma_1+\sigma_2)(\alpha)=\sigma_1(\alpha)+\sigma_2(\alpha)$；

(2) $(\sigma_1\sigma_2)(\alpha)=\sigma_1(\sigma_2(\alpha))$；

(3) $(k\sigma_1)(\alpha)=k\sigma_1(\alpha)$；

且$\sigma_1+\sigma_2,\sigma_1\sigma_2$，$k\sigma_1$仍为$V$的线性变换.

(4) $\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1=l$；$l$是恒等变换．称$\sigma_1$是可逆变换，$\sigma_2$是$\sigma_1$的逆变换．记$\sigma_1^{-1}=\sigma_2$.

4．设σ是线性空间V的线性变换，则

(1) $\sigma(0)=0$；

(2) $\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$；

(3) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，则$\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2\cdots$，$\sigma\alpha_n$仍线性相关.

（二） 答疑辅导

1．是否存在V的一个变换，既不满足线性变换定义中的条件(1)，又不满足条件(2)？

答　这样的变换是存在的．例如，设P是数域，$V=\{(x_1,x_2,x_3)|x_i\in P\}$．令

$$\sigma(x_1,x_2x_3)=(x_1^2,0,0)$$

显然σ是V的一个变换．它是既不适合条件(1)又不适合条件(2)的一个变换．

2．线性变换定义中两个条件是否独立？

答　定义中的两个条件是独立的．例如：P为实数域，$V=\{(a,b)|a,b\in P\}$．令

$\sigma(a,b)=(a,b)$当a,b同号或至少有一为零；

$\sigma(a,b)=(-a,-b)$当a,b异号．

显然σ是V的一个变换．且σ适合(2)．事实上，当a,b同号，$\sigma(k(a,b))=\sigma(ka,kb)=(ka,kb)=k(a,b)=k\sigma(a,b)$当$a,b$异号，而$k\neq 0,\sigma(k(a,b))=\sigma(ka,kb)=(-ka,-kb)=k(-a,-b)=k\sigma(a,b)$；而$k=0,\sigma(k(a,b))=(0,0)=k\sigma(a,b)$；当$a,b$至少有一个不为0，$\sigma(k(a,b))=\sigma(ka,kb)=(ka,kb)=k(a,b)=k\sigma(a,b)$．但不适合(1)．取$\alpha=(-2,-3)\beta=(-1,4)\sigma\alpha=(-2,-3),\sigma\beta=(1,-4),\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(-3,1)=(3,-1)\neq\sigma\alpha+\sigma\beta$．说明(1)是独立的．

又如：把复数域看作复数域上的线性空间，令$\sigma(\alpha)=\overline{\alpha}$．则$\sigma$适合(1)．事实上，$\sigma(\alpha+\beta)=\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$．但不适合(2)．取$\alpha=1,k=i,\sigma(k\alpha)=-i,k\sigma(\alpha)=i$；说明(2)是独立的。

3．线性变换σ应具备什么条件，才能保证将一组线性无关的向量变成线性无关的向量？

答 当σ是可逆线性变换就可．事实上，若σ可逆，则σ^{-1}也为线性变换．若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$线性无关，则$\sigma(\alpha_1)$，$\sigma(\alpha_2)$，$\cdots$，$\sigma(\alpha_n)$也线性无关．否则$\sigma^{-1}(\sigma\alpha_1),\sigma^{-1}(\sigma\alpha_2),\cdots,\sigma^{-1}(\sigma\alpha_n)$必线性相关．即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，与假设矛盾．

4．设V是P上的线性空间，$L(V)$为V的一切线性变换的全体．定义

$$(\sigma+\tau)\alpha=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha)\qquad \forall\sigma,\tau\in L(V),\alpha\in V,$$

$$(k\sigma)(\alpha)=k(\sigma(\alpha))\qquad \forall\sigma\in L(V),k\in P,\alpha\in V.$$

$L(V)$是不是也是P上线性空间？

答 当$\sigma,\tau\in L(V)$，容易验证：$\sigma+\tau$仍为V的线性变换，即$\sigma+\tau\in L(V)$．类似知$k\sigma\in L(V)$．

$$(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha)=\tau(\alpha)+\sigma(\alpha)=(\tau+\sigma)(\alpha)$$

所以 $\sigma+\tau=\tau+\sigma$．类似可证

$$(\sigma+\tau)+\theta=\sigma+(\tau+\theta),\forall\sigma,\tau,\theta\in L(V).$$

再定义零变换：

$$0(\alpha)=0\qquad \forall\alpha\in V.$$

则

$$0+\sigma=\sigma,\forall\sigma\in V.$$

定义负变换：

$$(-\sigma)(\alpha)=-\sigma(\alpha)\qquad \forall\sigma\in L(V),\alpha\in V.$$

则

$$(-\sigma)+\sigma=0.$$

另外4条也类似可证．故$L(V)$是P上线性空间．

注：读者自己验证V上全体变换并不构成P上线性空间．

（三） 题型归类

1．验证线性变换．

1） 直接验证

例1 在$P[x]$中定义$\sigma f(x)=x^2f(x)$，问σ是不是$P[x]$的线性变换？

解 $\forall f(x), g(x) \in P[x], k \in P$，则

$\sigma(f(x)+g(x)) = x^2(f(x)+g(x)) = \sigma f(x) + \sigma g(x)$

$\sigma(kf(x)) = x^2 kf(x) = k\sigma f(x)$.

所以σ是$P[x]$的线性变换.

2）根据已知σ先得出一个数学式子，再加以验证.

例2 σ是R^3中向量关于坐标平面ZOX的反射，问 σ 是不是线性变换？

解 $\alpha = (x, y, z) \in R^3$，由定义知

$$\sigma(x, y, z) = (x, -y, z).$$

$\forall \alpha_1 = (a, b, c), \alpha_2 = (d, e, m) \in R^3$,

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha_1+\alpha_2) &= \sigma(a+d, b+e, c+m) = (a+d, -b-e, c+m)\\ &= \sigma(\alpha_1) + \sigma(\alpha_2),\\ \sigma(k\alpha_1) &= (ka, -kb, kc) = k\sigma(\alpha_1).\end{aligned}$$

所以σ是R^3的线性变换.

3）证明不是线性变换

例3 在$P[x]$中，定义$\sigma f(x) = f(x)f'(x)$，试问σ是不是$P[x]$的线性变换？

解 取$1, x \in P[x]$，由于

$$\sigma(1+x) = 1+x, \sigma(1)+\sigma(x) = x.$$

$$\therefore \quad \sigma(1+x) \neq \sigma(1)+\sigma(x).$$

故σ不是$P[x]$的线性变换.

4）需要进行讨论

例4 在P^n中，定义

$$\sigma(\alpha) = \alpha + \beta \qquad \forall \alpha \in V$$

其中 β 为 P^n 中某一固定向量．问 σ 是不是P^n的线性变换？

解 当 $\beta = 0$ 时，σ 是 P^n 的线性变换.

当 $\beta \neq 0$ 时，由于 $\sigma(0) = \beta$，不满足 $\sigma(0) = 0$，因此σ

不是 P^n 的线性变换.

例5 在 $P^{n\times m}$ 中，定义

$$\sigma(X)=AXB+C \qquad X\in P^{n\times m}$$

其中 $A\in P^{s\times n},B\in P^{m\times t},C\in P^{s\times t}$ 是固定的矩阵. 类似可证当 $C=0$ 时，σ 是 $P^{n\times m}$ 的线性变换. 当 $C\neq 0$ 时,可证 σ 不是 $P^{n\times m}$ 的线性变换. 事实上，因为

$$\sigma(0+0)\neq\sigma(0)+\sigma(0).$$

2. 线性变换相等

例6 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为线性空间 V 的一组基,σ,τ 为 V 的两个线性变换，如果

$$\sigma(\alpha_i)=\tau(\alpha_i) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

证明：$\sigma=\tau$.

证 $\forall\alpha\in V$，下证 $\sigma(\alpha)=\tau(\alpha)$. 事实上，设

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n n_n,$$

那么

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha)&=k_1\sigma(\alpha_1)+\cdots+k_n\sigma(\alpha_n)\\&=k_1\tau(\alpha_1)+\cdots+k_n\tau(\alpha_n)\\&=\tau(\alpha).\end{aligned}$$

注 这个例子说明验证 $\sigma=\tau$，在有限维线性空间中，只有验证对所有基中元相等即可.

例7 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是 2 维线性空间 V 的基，σ，τ 是 V 的两个线性变换，若 $\sigma(\varepsilon_1)=\beta_1,\sigma(\varepsilon_2)=\beta_2,\tau(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\beta_1+\beta_2$，$\tau(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=\beta_1-\beta_2$，试证 $\sigma=\tau$.

证 由于

$$\tau(\varepsilon_1)+\tau(\varepsilon_2)=\beta_1+\beta_2,$$

$$\tau(\varepsilon_1)-\tau(\varepsilon_2)=\beta_1-\beta_2,$$

解得 $\qquad \tau(\varepsilon_1)=\beta_1=\sigma(\varepsilon_1)$，$\tau(\varepsilon_2)=\sigma(\varepsilon_2)=\beta_2$,

$\therefore\quad \sigma=\tau.$

3．求线性变换公式

例8（北京大学研究生入学试题） 设 V 是实数域 R 上三维向量空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 V 的一组基，又设在线性变换 T：$V\to V$ 下

$$T(\varepsilon_1)=\varepsilon_1,\ T(\varepsilon_2)=\varepsilon_1+\varepsilon_2,\ T(\varepsilon_3)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3.\quad(1)$$

试求 T 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 中的变换公式.

解 设 T 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下矩阵为 A，由(1)式知

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

任取 $\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+k_3\varepsilon_3$，则

$$T(\alpha)=T\left((\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}\right)=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)A\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}$$

$$=(k_1+k_2+k_3)\varepsilon_1+(k_1+k_2)\varepsilon_2+k_3\varepsilon_3.$$

4．线性变换的运算

例9 在 $P^{2\times2}$ 中，设

$$\sigma\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\tau\begin{pmatrix}a&b\\a&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa&0\\0&td\end{pmatrix}$$

其中 $s,t,a,b,c,d\in P$，证明：σ,τ 是 $P^{2\times2}$ 上线性变换，并求 $\sigma+\tau,\sigma\tau,\tau\sigma$.

证 由本节例5可知 σ,τ 是线性变换.

$$(\sigma+\tau)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\sigma\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(s+1)a+b & a-b\\ c+d & (t-1)d+c\end{pmatrix}$$

$$\sigma\tau\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\sigma\left(\tau\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=\sigma\begin{pmatrix}sa & 0\\ 0 & td\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}sa & sa\\ td & -td\end{pmatrix}$$

类似可求出

$$\tau\sigma\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa+sb & 0\\ 0 & tc-td\end{pmatrix}.$$

例10 （北京大学研究生入学试题） 设 V 是实数域 R 上三维向量空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 V 的一组基，又设 V 上线性变换为 T，且

$$T(\varepsilon_1)=\varepsilon_1,T(\varepsilon_2)=\varepsilon_1+\varepsilon_2,T(\varepsilon_3)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3.$$

1）试求 T 的逆变换 T^{-1} 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 中的变换公式；

2）求 T^{-1} 在 $T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),T(\varepsilon_3)$ 中的变换公式.

解 1）设 A,B 分别为 T 和 T^{-1} 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵. 由假设知

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$B=A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad T^{-1}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1) $T^{-1}(T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),T(\varepsilon_3))=(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)$

$$=(T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),T(\varepsilon_2))A^{-1}$$

$$=(T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),T(\varepsilon_3))\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

5．线性变换多项式

例11 设 $g(x)=ax^2+bx+c\in P[x]$，σ 是 $P[x]$ 的微分变换，又设 $f(t)=t^2+2t-5$．求 $f(\sigma)(g(x))$．

解 由假设知 $f(\sigma)=\sigma^2+2\sigma-5I$．所以

$$f(\sigma)(g(x))=\sigma^2(g(x))+2\sigma(g(x))-5g(x)$$
$$=-5ax^2+(4a-5b)x+(2a+2b-5c).$$

6．有限维线性空间上线性变换的特征

例12 设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，证明下面3个条件等价：

1）σ 是可逆的；

2）σ 是单射；

3）σ 是满射．

证 1)$\Longrightarrow$2)．$\forall\sigma(\alpha_1)=\sigma(\alpha_2)$，由于 σ 可逆，设逆为 σ^{-1}，两边作用 σ^{-1} 可得 $\alpha_1=\alpha_2$．故 σ 为单射．

2)$\Longrightarrow$3)．取 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$．由于 σ 为单射，可证 $\sigma(\alpha_1),\cdots\sigma(\alpha_n)$，也是 V 的一组基．事实上，只要证明它们线性无关，设

$$0=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_3)+\cdots+k_n\sigma(\alpha_n)$$
$$=\sigma(k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n)$$

因为 σ 为单射，有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$．从而

$$k_1=k_2=\cdots=k_n=0.$$

再证 σ 为满射，$\forall\alpha\in V$，那么

$$\alpha = l_1\sigma(\alpha_1) + l_2\sigma(\alpha_2) + \cdots + l_n\sigma(\alpha_n)$$
$$= \sigma(l_1\alpha_1 + \cdots + l_n\alpha_n) = \sigma(\beta),$$

其中 $\beta = l_1\alpha_1 + \cdots + l_n d_n \in V$. 即证 σ 为满射.

3)$\Longrightarrow$1). 设 σ 为满射，下证 σ 可逆. 取 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 由于 σ 满射，存在$\beta_i \in V$ 使得

$$\sigma(\beta_i) = \alpha_i \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

由于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，可证 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 也线性无关，从而也为 V 的一组基.

$\forall \alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n \in V$，定义

$$\tau(\alpha) = k_1\beta_1 + \cdots + k_n\beta_n.$$

那么 τ 是 V 的线性变换，且

$$\tau(\alpha_i) = \beta_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{2}$$

$$\forall \gamma \in V, \gamma = l_1\beta_1 + \cdots + l_n\beta_n = s_1\alpha_1 + \cdots + s_n\alpha_n$$
$$\tau\sigma(\gamma) = \tau(l_1\sigma(\beta_1)) + \cdots + \tau(l_n\sigma(\beta_n))$$
$$= \tau(l_1\alpha_1) + \cdots + \tau(l_n\alpha_n) = l_1\beta_1 + \cdots + l_n\beta_n = \gamma$$

即 $\tau\sigma = I$. 其次

$$\sigma\tau(\gamma) = \sigma(s_1\tau(\alpha_1)) + \cdots + \sigma(s_n\tau(\alpha_n))$$
$$= \sigma(s_1\beta_1) + \cdots + \sigma(s_n\beta_n)$$
$$= s_1\sigma(\beta_1) + \cdots + s_n\sigma(\beta_n)$$
$$= s_1\alpha_1 + \cdots + s_n\alpha_n = \gamma$$

即 $\sigma\tau = I$. 即证 σ 可逆.

注 在无限维线性空间中，本例结论不再成立. 例如在 $P[x]$ 中，定义

$$\sigma(f(x)) = xf(x), \quad \tau(f(x)) = f'(x).$$

σ 是单射，但不是满射(因为 1 无原象). τ 是满射，但不是单射.

§2 线性变换的矩阵

（一）内容提要

1．设 σ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基，若

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

其中 $A=(a_{ij})$，称矩阵 A 为线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵(称变换矩阵)．

2．在 V 中选定一组基，线性变换 σ 与其变换矩阵一一对应，且线性变换的和、积、数乘和逆变换与其变换矩阵的和、积、数乘和逆矩阵相对应．

3．(在线性变换 σ 下的象的坐标计算)设 $\alpha\in V$，α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\sigma(\alpha)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $(y_1,\cdots,y_n)$，则

$$(y_1\cdots y_n)=(x_1\cdots x_n)A',$$

其中 A 为 σ 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵．

4．设 V 是 n 维线性空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 V 的两组基，$\sigma\in L(V)$，

$$\sigma(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A$$

$$\sigma(\beta_1\cdots\beta_n)=(\beta_1\cdots\beta_n)B$$

$$(\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)P$$

则
$$B=P^{-1}AP.$$

5．V 是 n 维线性空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基，$\sigma,\tau\in L(V)$．且

$$\sigma(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A,\quad \tau(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)B.$$

则
$$(\sigma+\tau)(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)(A+B),$$

$$k\sigma(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)(kA),$$

$$(\sigma+\tau)(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)(A+B).$$

并当 σ 为可逆变换时，

$$\sigma^{-1}(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A^{-1}.$$

（二）答疑辅导

1．在矩阵中，不存在 n 阶方阵 A、B 适合关系 $AB-BA=E$. 在线性变换中，是否也不存在 σ、τ，适合关系 $\sigma\tau-\tau\sigma=I$？I 为恒等变换.

答　在线性变换中，存在线性变换 σ、τ，适合关系 $\sigma\tau-\tau\sigma=I$.

例如，在线性空间 $P[x]$ 中，定义两线性变换如下：

$$\sigma(f(x))=f'(x)，\ \tau(f(x))=xf(x)$$

则

$$\begin{aligned}(\sigma\tau-\tau\sigma)(f(x))&=(\sigma\tau)(f(x))-(\tau\sigma)(f(x))\\&=\sigma(xf(x))-\tau(f'(x))\\&=f(x)+xf'(x)-xf'(x)\\&=f(x).\end{aligned}$$

即

$$\sigma\tau-\tau\sigma=I$$

当然，在有限维线性空间中，不存在线性变换 σ，τ 满足 $\sigma\tau-\tau\sigma=I$.

2．在矩阵中，若有 n 阶矩阵 A，B，适合 $AB=E$，则 A 可逆．在 n 维线性空间 V 上的线性变换 σ，τ 适合 $\sigma\tau=I$ 时，是否必有 σ 可逆？当 V 是无限维线性空间时又如何？

答　在有限维线性空间上，若线性变换 σ，τ 适合 $\sigma\tau=I$，则 σ 为可逆．这时只需说明 $\tau\sigma=I$ 即可．设 ε_1 ε_2，…，…ε_n 为 V 的一组基，并设 σ，τ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下矩阵分别为 A，B，I 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下矩阵为 E，又因 $\tau\sigma$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下矩阵为 BA，因此，由 $AB=E=BA$，可得 $\sigma\tau=I=$

σ. 故 σ 可逆.

当 V 是无限维空间时，由 $\sigma\tau=I$ 未必能推出 $\tau\sigma=I$. 即 σ 未必是可逆线性变换. 例如，$P[x]$是无限维线性空间，在 $P[x]$中任意取

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

在 $P[x]$中定义两个变换：

$$\sigma(f(x))=a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1$$

$$\tau(f(x))=a_nx^{n+1}+a_{n-1}x^n+\cdots+a_nx^2+a_0x$$

易证 σ、τ 都是 $P[x]$上的线性变换，且

$$\begin{aligned}(\sigma\tau)f(x)&=\sigma(\tau f(x))=\sigma(a_nx^{n+1}+a_{n-1}x^n\\&\quad+\cdots+a_1x^2+a_0x)\\&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\\&=f(x)\end{aligned}$$

即 $\sigma\tau=I$. 而

$$\begin{aligned}(\tau\sigma)f(x)&=\tau(\sigma f(x))\\&=\tau(a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1)\\&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x\end{aligned}$$

当 $a_0\neq0$ 时，$(\tau\sigma)f(x)\neq f(x)$，故 $\tau\sigma\neq I$.

（三）题型归类

1. 求象的坐标

例 1 （湖南大学研究生入学试题） 设 V 的线性变换 T 在基 $\alpha_1=(1,1,0)$，$\alpha_2=(1,2,0)$，$\alpha_3=(0,2,-1)$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&-2&-1\\1&-1&4\end{pmatrix}.$$

而 α 在基 $\beta_1=(1,2,3)$，$\beta_2=(1,3,5)$，$\beta_3=(0,2,1)$ 下的坐

标是 $(1,-2,1)$. 求 $T(\alpha)$ 在 β_1,β_2,β_3 下的坐标.

解 由设

$$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}. \tag{1}$$

再设 T 在 β_1,β_2,β_3 下矩阵为 B，由 α_1, α_2, α_3 到 β_1,β_2, β_3 过渡矩阵为 P，则

$$T(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)B, \tag{2}$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P, \tag{3}$$

由 (3) 知

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&0&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0\\2&3&2\\3&5&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6&-11&-4\\7&12&4\\-3&-5&-1\end{pmatrix}.$$

由 (1) 式知

$$T\alpha=T(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)B\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)P^{-1}AP\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}237\frac{1}{3}\\-10\\115\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

2. 求线性变换在某组基下的矩阵

1) 只给一组基

例 2 （北京航空学院研究生入学试题） 设T是由

$$T(x,y,z)=(0,x,y)$$

所给的$R^3\to R^3$的线性变换，试求T，T^2，T^3的特征多项式.

解 给R^3一组基$\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$

则
$$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A,$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

$$|\lambda E-A|=\lambda^3,\ |\lambda E-A^2|=\lambda^3,\ |\lambda E-A^3|=\lambda^3$$

即T，T^2，T^3的特征多项式均为λ^3.

2) 给两组基

例 3 （北京钢铁学院研究生入学试题） 设二维向量空间中，线性变换T_1对基底$\alpha_1=(1,2)$，$\alpha_2=(2,1)$的矩阵是$\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$，线性变换$T_2$对基底$\beta_1=(1,1)$，$\beta_2=(1,2)$的矩阵是$\begin{pmatrix}3&3\\2&4\end{pmatrix}$，求变换$T_1+T_2$对$\beta_1,\beta_2$的矩阵，$T_1T_2$对$\alpha_1,\alpha_2$的矩阵.

解
$$T_1(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix},$$

$$T_2(\beta_1,\beta_2)=(\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix}3&3\\2&4\end{pmatrix},$$

设

$$(\alpha_1,\alpha_2)=(\beta_1,\beta_2)P$$

即

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}P,\ \therefore P=\begin{pmatrix}0&3\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$T_1(\beta_1,\beta_2)=(\beta_1,\beta_2)P\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=(\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix}5&6\\-\frac{2}{3}&-1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad (T_1+T_2)(\beta_1,\beta_2)=(\beta_1,\beta_2)\left[\begin{pmatrix}5&6\\-\frac{2}{3}&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&3\\2&4\end{pmatrix}\right]$$

$$=(\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix}8&9\\\frac{4}{3}&3\end{pmatrix}.$$

$$T_2(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1\ \ \alpha_2)P^{-1}\begin{pmatrix}3&3\\2&4\end{pmatrix}P$$

$$=(\alpha_1,\ \alpha_2)\begin{pmatrix}5&4\\1&2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad T_1T_2(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1\ \ \alpha_2)\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&4\\1&2\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\ \alpha_2)\begin{pmatrix}7&8\\13&14\end{pmatrix}.$$

3）给定三组基

例 4 设 R^3 中线性变换σ把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 变为β_1,β_2,β_3，其中 $\alpha_1=(1,0,1)$，$\alpha_2=(0,1,0)$，$\alpha_3=(0,0,1)$，$\beta_1=(1,0,$

2)，$\beta_2=(-1,2,-1)$，$\beta_3=(1,0,0)$，求 σ 在基 α_1，α_2，α_3 下矩阵和 σ 在 $\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵.

解

$$\sigma\alpha_1=(1\ 0\ 2)=\alpha_1+\alpha_3$$

$$\sigma\alpha_2=(-1,2,-1)=-\alpha_1+2\alpha_2$$

$$\sigma\alpha_3=(0,0,1)=\alpha_1-\alpha_3$$

$$\therefore\quad \sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

其次

$$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \sigma(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)C$$

其中

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&2&0\\2&-1&0\end{pmatrix}.$$

3．求线性变换 σ

例 5 在 R^3 中，试求在基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(1,1,0)$，$\varepsilon_3=(1,1,1)$ 下矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&-1\\1&2&2\end{pmatrix}$$

的线性变换.

解 设所求线性变换为 σ，由设

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$$

任取 $\alpha\in R^3$ 则

$$\begin{aligned}\alpha=(a_1,a_2,a_3)&=b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+b_3\varepsilon_3\\&=b_1(1,0,0)+b_2(1,1,0)+b_3(1,1,1)\\&=(b_1+b_2+b_3,\ b_2+b_3,\ b_3)\end{aligned}$$

由向量相等得 $b_1=a_1-a_2$，$b_2=a_2-a_3$，$b_3=a_3$.

所以

$$\begin{aligned}\sigma\alpha&=(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3)A\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A\begin{pmatrix}a_1-a_2\\a_2-a_3\\a_3\end{pmatrix}\\&=(a_1-2a_2+3a_3)\varepsilon_1+(-a_1+a_2-a_3)\varepsilon_2\\&\quad+(a_1+a_2)\varepsilon_3\\&=(a_1+2a_3,\ 2a_2-a_3,\ a_1+a_2).\end{aligned}$$

这就是 σ 的公式.

4. 证明题

例 6 设 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 分别把线性无关向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 变为向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$. 证明：$\sigma$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 BA^{-1}，其中 A 和 B 的列分别是向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 在基 $\{\varepsilon_i\}$ 下的坐标.

证 由假设知

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，故 A 可逆，则

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)A^{-1}$$

$$\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_n)$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B.$$

$$\therefore\quad \sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A^{-1}$$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)BA^{-1}$$

即 σ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下矩阵为 BA^{-1}。

例 7 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换，证明：如果 σ 在任一组基下的矩阵都相同，那么 σ 是数乘变换。

证 设 σ 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下矩阵为 $A=(a_{ij})$，又设 X 为任一可逆矩阵，且

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)X$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 也是 V 的一组基，σ 在这组基下的矩阵是 $X^{-1}AX$，从而 $A=X^{-1}AX$，即 $XA=AX$。这说明 A 与一切可逆矩阵可变换。若取

$$X_1=\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&n\end{pmatrix}$$

则由 $AX_1=X_1A$ 知 $a_{ij}=0(i\neq j)$，因此

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{pmatrix}$$

再取

$$X_2=\begin{pmatrix}0&1&0\cdots0\\0&0&1\cdots0\\\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0\cdots1\\1&0&0\cdots0\end{pmatrix}$$

由 $AX_2=X_2A$ 知 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$，故 A 为数量矩阵，从而 σ 是数乘变换．

§3 值域与核

（一）内容提要

1．设 σ 是线性空间 V 的线性变换，称

$$\sigma(V)=\{\sigma\alpha|\alpha\in V\}$$

为 σ 的值域．称

$$\sigma^{-1}(0)=\{\alpha\in V|\sigma\alpha=0\}$$

为 σ 的核（或 $\ker\sigma$）．

$\sigma(V)$)和 $\sigma^{-1}(0)$是 V 的子空间．

σ 的秩$=\dim\sigma V$．

σ 的零度$=\dim\sigma^{-1}(0)$．

当 $\dim V=n$ 时，则

$$\dim\sigma V+\dim\sigma^{-1}(0)=n.$$

2．设 σ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，且

$$\sigma(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)A.$$

则

（1）$\sigma V=L(\sigma\varepsilon_1,\cdots,\sigma\varepsilon_n)$

（2）$\dim\sigma V=$秩$\{\sigma\varepsilon_1,\cdots,\sigma\varepsilon_n\}$

（3）$\dim\sigma^{-1}(0)=n-$秩(A)

（4）设 $W=\{x\in P^n|Ax=0\}$的基础解系为 $\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_s$

则令

$$\alpha_i=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)\eta_i\ (i=1,2,\cdots s)$$

则
$$\sigma^{-1}(0)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$$

3．σ 是满射$\Longleftrightarrow\sigma V=V$

σ 是单射$\Longleftrightarrow\sigma^{-1}(0)=\{0\}$

（二）答疑辅导

1．如何求线性变换 σ 的值域？

答 求线性变换 σ 的值域，只需在 V 中选取一组基，根据所给的线性变换，对基进行变换，然后求出基象组的一个极大无关组，就是 $\sigma(V)$的一组基．

2．怎样求线性变换的核？

答 求 $\sigma^{-1}(0)$，一般是按 $\sigma^{-1}(0)$的定义．求 $\sigma^{-1}(0)$的一组基可以这样进行：设 $\alpha\in\sigma^{-1}(0)$，且 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，则 $\sigma(\alpha)$在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，其中 A 为 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵．因为 $\sigma(\alpha)=0$，所以 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n)'=0$．这样，这个齐次线性方程组的基础解系就是 $\sigma^{-1}(0)$的一组基的坐标．

3．在有限维线性空间中，当 σ 是 V 到 $V'(V\neq V')$ 的线性映射时，是否还有性质：σ 是单射$\Longleftrightarrow\sigma$ 是满射？

答 当 $V\neq V'$ 时，虽然 σ 是线性映射，但未必具有这个性质．

例如，$V=P^{n\times n}$，$V'=P^n$．任取

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in P^{n\times n}.$$

其中 α_i 为列向量，作映射 σ：

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\longmapsto\alpha_1\in P^n$$

是 $P^{n\times n}$ 到 P^n 内的映射，易证 σ 是线性映射，但显然 σ 不是单射．而 σ 是满射．

4．由 $\dim(\sigma V)+\dim(\sigma^{-1}(0))=\dim V$，能否推知一定有 $\sigma(V)+\sigma^{-1}(0)=V$？

答 不能．例如取 $V=P[x]_n$，σ 是 V 上微分变换，这

时有 $\sigma(V)=P[x]_{n-1}$，$\sigma^{-1}(0)=P$，且

$$\dim\sigma(V)+\dim(\sigma^{-}(0)=\dim V$$

但 $P[x]_{n-1}+P\neq P[x]_n$.

如果加上 $\sigma^2=\sigma$ 这个条件，则从

$$\dim\sigma(V)+\dim\sigma^{-1}(0)=\dim V \tag{1}$$

能推出 $\sigma(V)\oplus\sigma^{-1}(0)=V$ 成立.

事实上，对任意 $\alpha\in V$，$\sigma\alpha\in\sigma(V)$，设 $\alpha_1=\alpha-\sigma\alpha$，则 $\sigma\alpha_1=\sigma\alpha-\sigma^2\alpha=0$，故 $\alpha_1\in\sigma^{-1}(0)$因此 $\alpha\in\sigma(V)+\sigma^{-1}(0)$，即 $V\subseteq\sigma(V)+\sigma^{-1}(0)$. $\sigma(V)+\sigma^{-1}(0)\subseteq V$ 是显然的. 从而 $V=\sigma(V)+\sigma^{-1}(0)$.

由(1)式，所以

$$V=\sigma(V)\oplus\sigma^{-1}(0).$$

（三）题型归类

1．求核

例 1（华南理工大学研究生入学试题） 元素属于实数域 R 的 2×2 矩阵，按矩阵加法和矩阵与数的数量乘法构成数域 R 上的一个线性空间，令 $M=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$，在这线性空间中，变换

$$F(A)=AM-MA$$

是一线性变换，试求 F 的核的维数和一组基.

解 设 $\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}\in F^{-1}(0)$，则

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=F\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u=0 \\ x+y-v=0 \end{cases}$$

令 $y=1$，$v=0$ 得 $x=-1$，$u=0$

$$A_1=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

再令 $y=0$，$v=1$ 解得 $x=1$，$u=0$

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

那从 $F^{-1}(0)=L(A_1,A_2)$, $\dim F^{-1}(0)=2$. A_1,A_2 为 $F^{-1}(0)$ 的一组基.

例 2 设 σ 是 P^4 中线性变换，且在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

求 $\sigma^{-1}(0)$的基.

解 设 $\alpha\in\sigma^{-1}(0)$，它在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标为 (x_1,x_2,x_3,x_4)，则有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

因秩 $A=2$，只需解前两个方程

$$\begin{cases} x_1+2x_3+x_4=0 \\ -x_1+2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$$

得基础解系$\left(-2,-\dfrac{3}{2},1,0\right)$，$(-1,-2,0,1)$.

令
$$\eta_1 = -2\varepsilon_1 - \frac{3}{2}\varepsilon_2 + \varepsilon_3$$
$$\eta_2 = -\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4$$
那么
$$\sigma^{-1}(0) = L(\eta_1, \eta_2).$$

2．求值域

例 3 设 σ 是 R^3 的线性变换，
$$\sigma(x,y,z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$$
求 $\sigma(R^3)$的一组基．

解 取 R^3 的一组基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$，则 $\sigma(R^3)=L(\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\sigma\varepsilon_3)$．而 $\sigma\varepsilon_1=(1,0,1)$，$\sigma\varepsilon_2=(2,1,1)$，$\sigma\varepsilon_3=(-1,1,-2)$．显然$(1,0,1)$，$(2,1,1)$线性无关，而
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
即$(1,0,1)$，$(2,1,1)$，$(-1,1,-2)$线性相关．因此$(1,0,1)$，$(2,1,1)$是 $\sigma(R^3)$的基．即
$$\sigma(R^3) = L(\sigma\varepsilon_1, \sigma\varepsilon_2).$$

3．值域与核的关系

例4 （云南大学研究生入学试题） 设 σ 是线性空间 V 的线性变换，证 $\sigma(V)\subseteq\sigma^{-1}(0) \Longleftrightarrow \sigma^2=0$．

证 如果 σ^2 是零变换，任取 $\alpha\in\sigma(V)$，则有$\beta\in V$，使 $\sigma(\beta)=\alpha$，于是 $\sigma(\alpha)=\sigma(\sigma\beta)=\sigma^2\beta=0$，所以 $\alpha\in\sigma^{-1}(0)$ 即 $\sigma(V)\subseteq\sigma^{-1}(0)$．

反之，若 $\sigma(V)\subseteq\sigma^{-1}(0)$，任取 $\alpha\in V$，$\sigma\alpha\in\sigma(V)\subseteq\sigma^{-1}(0)$．因而 $\sigma(\sigma\alpha)=\sigma^2(\alpha)=0$．即 σ^2 是零变换．

4．两线性变换值域（或核）相等的条件

例5 设σ、τ是线性空间V的两个线性变换，且$\sigma^2=\sigma$，$\tau^2=\tau$，证明：

(1) $\sigma(V)=\tau(V)\Longleftrightarrow\sigma\tau=\tau$，$\tau\sigma=\sigma$；

(2) $\sigma^{-1}(0)=\tau^{-1}(0)\Longleftrightarrow\sigma\tau=\sigma$，$\tau\sigma=\tau$.

证 (1) 必要性 因$\sigma(V)=\tau(V)$．任取$\alpha\in V$，有$\tau(\alpha)\in\tau(V)=\sigma(V)$．故有$\beta\in V$，使$\tau(\alpha)=\sigma(\beta)$．则$(\sigma\tau)\alpha=\sigma(\tau\alpha)=\sigma(\sigma\beta)=\sigma\beta=\tau\alpha$．由$\alpha$的任意性知$\sigma\tau=\tau$．同理有$\tau\sigma=\sigma$．

充分性 设$\sigma\tau=\tau$，$\tau\sigma=\sigma$．任取$\sigma(\alpha)\in\sigma(V)$，有$\sigma(\alpha)=(\tau\sigma)\alpha=\tau(\sigma\alpha)\in\tau(V)$，故$\sigma(V)\subseteq\tau(V)$．同理可证$\tau(V)\subseteq\sigma(V)$．故$\sigma(V)=\tau(V)$．

(2) 必要性 设$\sigma^{-1}(0)=\tau^{-1}(0)$．任取$\alpha\in V$，则$\sigma^2(\alpha)=\sigma(\alpha)$，故$\sigma(\sigma\alpha-\alpha)=0$，即$\sigma\alpha-\alpha\in\sigma^{-1}(0)=\tau^{-1}(0)$．从而$\tau(\sigma\alpha-\alpha)=0$，故$(\tau\sigma)\alpha=\tau\alpha$．由$\alpha$的任意性知$\tau\sigma=\tau$，同理有$\sigma\tau=\sigma$．

充分性 设$\sigma\tau=\sigma$，$\tau\sigma=\tau$．任取$\alpha\in\sigma^{-1}(0)$，则$\sigma(\alpha)=0$，$\tau(\alpha)=(\tau\sigma)\alpha=\tau(\sigma\alpha)=\tau(0)=0$，所以$\alpha\in\tau^{-1}(0)$．即$\sigma^{-1}(0)\subseteq\tau^{-1}(0)$．同理可证$\tau^{-1}(0)\subseteq\sigma^{-1}(0)$．从而有$\sigma^{-1}(0)=\tau^{-1}(0)$．

5．可逆线性变换的等价条件

例6 设V是n维线性空间，σ是V中任一线性变换，则下列命题等价：

(1) σ是可逆变换；

(2) σ是单射；

(3) $\sigma^{-1}(0)=\{0\}$；

(4) $\dim\sigma^{-1}(0)=0$；

(5) $\dim \sigma(V)=n$；

(6) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的任意一组基，则 $\sigma\alpha_1$, $\sigma\alpha_2$, $\cdots,\sigma\alpha_n$ 是 $\sigma(V)$的基.

证 按循环证法. (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (5) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (1).

(1) $\Longrightarrow$ (2)　因为 σ 可逆，故存在 σ^{-1}, 使 $\sigma\sigma^{-1}=I$, 若 $\sigma\alpha=\sigma\beta$，则 $\sigma^{-1}(\sigma\alpha)=\sigma^{-1}(\sigma\beta)$即 $\alpha=\beta$.

(2) $\Longrightarrow$ (3)　设 $\alpha\in\sigma^{-1}(0)$，则 $\sigma\alpha=0$. 改写成 $\sigma\alpha=\sigma 0$，由(2)得 $\alpha=0$，所以 $\sigma^{-1}(0)=\{0\}$.

(3) $\Longrightarrow$ (4)　因 $\sigma^{-1}(0)=\{0\}$，所以 $\dim\sigma^{-1}(0)=0$.

(4) $\Longrightarrow$ (5)　因 $\dim\sigma(v)+\dim\sigma^{-1}(0)=n$，所以

$$\dim\sigma(V)=n-\dim\sigma^{-1}(0)=n-0=n.$$

(5) $\Longrightarrow$ (6)　若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基，则 $\sigma(V)=L(\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_n)$，因为 $\dim\sigma(V)=n$, 所以 $\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_n$ 是 $\sigma(V)$的一组基.

(6) $\Longrightarrow$ (1)　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基，由(6)知，$\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_n$ 也是 $\sigma(V)$的一组基，故 $\sigma(V)=V$. 由P. 300例12可证 σ 为可逆变换.

6．求满足某些条件的线性变换.

例7　设 W_1 和 W_2 是 n 维空间 V 的两个子空间，且其维数之和等于 n. 求证：存在 V 的线性变换 σ，使 $\sigma^{-1}(0)=W_1$，$\sigma(V)=W_2$.

证　设子空间 W_1 和 W_2 的维数分别为 s 和 $m=n-s$. 在子空间 W_2 中任取一基：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，再在子空间 W_1中取一基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，并扩充为 V 的基：$\beta_1,\cdots,\beta_s,\beta_{s+1},\cdots,\beta_n$，用 σ 表示由以下条件所确定的线性变换：

$$\sigma\beta_1=\cdots=\sigma\beta_s=0,\ \sigma\beta_{s+1}=\alpha_1,\cdots,\sigma\beta_n=\alpha_m$$

首先，对这个线性变换 σ 显然有

$$\sigma(V)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=W_2;$$

其次，由于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是 W_1 的基，故有

$$W_1=L(\beta_1,\cdots,\beta_s)\subseteq\sigma^{-1}(0)$$

另一方面，在 $\sigma^{-1}(0)$ 中任取一向量 α，则可由基 $\{\beta_i\}(i=1,2,\cdots n)$ 线性表示，设为

$$\alpha=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s+k_{s+1}\beta_{s+1}+\cdots+k_n\beta_n$$

由于 $\sigma\alpha=0$，故

$$\begin{aligned}\sigma\alpha&=\sigma(k_1\beta_1+\cdots+k_s\beta_s+k_{s+1}\beta_{s+1}+\cdots+k_n\beta_n)\\&=k_{s+1}\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_m=0\end{aligned}$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，故 $k_{s+1}=\cdots=k_n=0$, 从而有 $\alpha=k_1\beta_1+\cdots+k_s\beta_s\in W_1$. 又有 $\sigma^{-1}(0)\subseteq W_1$. 所以有 $\sigma^{-1}(0)=W_1$.

例8 设 σ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换. 证明在 V 中可选取两组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，使空间 V 的任一向量 α 在前一基下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 时，它的象 $\sigma\alpha$ 在后一基下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_r,0,\cdots,0)$.

证 设 σ 的秩为 r. 取 σ 的核 $\sigma^{-1}(0)$ 的一组基（含 $n-r$ 个向量）$\varepsilon_{r+1},\varepsilon_{r+2},\cdots,\varepsilon_n$，并把它扩充成空间 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n$. 可以证明向量组 $\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_2,\cdots,\sigma\varepsilon_r$ 线性无关. 令

$$\eta_1=\sigma\varepsilon_1,\eta_2=\sigma\varepsilon_2,\cdots,\eta_r=\sigma\varepsilon_r,$$

并把它扩充为空间 V 的基：$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$. 当向量 α 在基 $\{\varepsilon_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 下的坐标为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，即当 $\alpha=x_1\varepsilon_1+\cdots+x_r\varepsilon_r+x_{r+1}\varepsilon_{r+1}+\cdots+x_n\varepsilon_n$ 时，由于 $\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n$ 是 $\sigma^{-1}(0)$ 的基，故有

$$\sigma\alpha=x_1\sigma\varepsilon_1+\cdots+x_r\sigma\varepsilon_r+x_{r+1}\sigma\varepsilon_{r+1}+\cdots+x_n\sigma\varepsilon_n$$

$$=x_1\eta_1+x_2\eta_2+\cdots+x_r\eta_r$$

亦即 σ 在 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_r,0,\cdots0)$.

7．直和

例9 （南开大学，兰州大学，华中师大，广西大学研究生入学试题） 设 σ 是数域 P 之线性空间 V 的线性变换，若 $f(x)$，$g(x)$是 $P[x]$的多项式，$h(x)=f(x)g(x)$．证明

1）$\ker(f(\sigma))+\ker g(\sigma)\subseteq\ker(h(\sigma))$；

2）若$(f(x),g(x))=1$，则

$$\ker f(\sigma)\oplus\ker g(\sigma)=\ker h(\sigma).$$

证 1）$\forall\,\alpha\in\ker f(\sigma)+\ker g(\sigma)$，则

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1\in\ker f(\sigma),\ \alpha_2\in\ker g(\sigma)$$

$$\therefore\quad f(\sigma)\alpha_1=0,\ g(\sigma)\alpha_2=0.$$

$$h(\sigma)\alpha=h(\sigma)\alpha_1+h(\sigma)\alpha_2$$

$$=f(\sigma)g(\sigma)\alpha_1+f(\sigma)g(\sigma)\alpha_2=0.$$

$$\therefore\quad \alpha\in\ker(h(\sigma)),$$

即证1)．

2）由设存在 $u(x)$，$v(x)\in P[x]$，使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

$$u(\sigma)f(\sigma)+v(\sigma)g(\sigma)=l\quad(l\text{ 为 }V\text{ 的恒等变换})\qquad(1)$$

$\forall\,\beta\in\ker(h(\sigma))$，则 $h(\sigma)\beta=0$．由(1)式

$$\beta=u(\sigma)f(\sigma)\beta+v(\sigma)g(\sigma)\beta=\beta_1+\beta_2\qquad(2)$$

其中 $\beta_1=u(\sigma)f(\sigma)\beta$，$\beta_2=v(\sigma)g(\sigma)\beta$，

$$g(\sigma)\beta_1=u(\sigma)h(\sigma)\beta=0\quad\therefore\quad\beta_1\in\ker g(\sigma).$$

同理可证 $\beta_2\in\ker f(\sigma)$．由(2)式则

$$\beta\in\ker f(\sigma)+\ker g(\sigma),\ \ker h(\sigma)\subseteq\ker f(\sigma)+\ker g(\sigma).$$

再由上面1)的证明，从而有

$$\ker h(\sigma)=\ker f(\sigma)+\ker g(\sigma).\qquad(3)$$

再证直和．设 $\gamma\in\ker f(\sigma)\cap\ker g(\sigma)$，则

$$f(\sigma)\gamma=g(\sigma)\gamma=0$$

由(1)式

$$\gamma=u(\sigma)f(\sigma)\gamma+v(\rho)g(\sigma)\gamma=0.$$

$$\therefore\quad \ker h(\sigma)=\ker f(\sigma)\oplus\ker g(\sigma).$$

8．维数公式

例10（郑州大学研究生入学试题） 设 T 为有限维线性空间 V 的线性变换，W 为 V 的子空间，证明：维(TW)+维$(T^{-1}(0)\cap W))$=维 W．

证 设维$(T^{-1}(0)\cap W)=m$，并取它的一组基为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$．再扩充为 W 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots\alpha_s$，

则
$$T\alpha_1=\cdots=T\alpha_m=0,$$

$$W=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_s)$$

$$\begin{aligned}TW&=L(T\alpha_1,\cdots,T\alpha_m,T\alpha_{m+1},\cdots,T\alpha_s)\\&=L(T\alpha_{m+1},\cdots,T\alpha_s)\end{aligned}\tag{1}$$

下证 $T\alpha_{m+1},\cdots,T\alpha_s$ 线性无关．设

$$k_{m+1}T\alpha_{m+1}+\cdots+k_sT\alpha_s=0,$$

那么

$$T(k\alpha_{m+1}+\cdots+k_s\alpha_s)=0,$$

$$k_{m+1}\alpha_{m+1}+\cdots+k_s\alpha_s\in T(0)\cap W,$$

$$k_{m+1}\alpha_{m+1}+\cdots+k_s\alpha_s=l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m.$$

由表示法唯一，则 $\quad k_{m+1}=\cdots=k_s=l_1=\cdots=l_m=0.$

即 $T\alpha_{m+1},\cdots,T\alpha_s$ 线性无关，则由(1)式有

$$维(TW)=s-m=维\,W-维(T^{-1}(0)\cap W).$$

移项即证．

注：本例是p.185(Ⅰ)式的证明．

§4 不变子空间

（一）内容提要

1. $\sigma \in L(V)$，W 是 V 的子空间，W 是 σ-子空间$\Longleftrightarrow$ $\sigma(W) \subseteq W$.

2. 设 $W \subseteq V$，$W = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$，则 W 是 σ-子空间$\Longleftrightarrow \sigma\alpha_i \in W$，$i = 1, 2, \cdots, s$.

3. 设 $\dim V = n$，$\sigma \in L(V)$，$W \subseteq V$，$\dim W = m$，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ 为 W 的基. 扩充为 V 的基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \cdots, \varepsilon_n$，则 W 是 σ-子空间$\Longleftrightarrow \sigma$ 在此基下矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} & a_{m+1,1} & \cdots\cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{mm} & a_{m+1,m} & \cdots\cdots & a_{nm} \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{nm+1} \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{m+1,n} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

4. 设 $\dim V = n$，$\sigma \in L(V)$，则 σ 在 V 的某基下矩阵为准对角阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

的充要条件是 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$. 其中 W_i 为 σ-子空间. $(i = 1, 2, \cdots, s)$

5. $\sigma \in L(V)$，其特征多项式 $f(\lambda)$ 可分解因式为

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

则 V 可分解成不变子空间的直和：

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$$

其中 $W_i = \{\alpha \mid (\sigma - \lambda_i I)^{r_i}\alpha = 0 \quad \alpha \in V\}$.

6. $\sigma\in L(V)$ 则 $\sigma(V)$ 与 $\sigma^{-1}(0)$ 都是σ -子空间.

7. V 是数域 P 上线性空间,$\sigma\in L(V)$. $f(x)\in P[x]$则 $f(\sigma)V$, $f(\sigma)^{-1}(0)$ 都是 σ-子空间.

(二) 答疑辅导

1. 特征子空间 V_λ 是否为不变子空间?

答 $V_\lambda=\{\alpha|\sigma\alpha=\lambda\alpha\}$, $\forall\alpha\in V_\lambda$, $\sigma\alpha=\lambda\alpha\in V_\lambda$. 从而 V_λ 是 σ 的不变子空间

2. 不变子空间的定义中，为什么必须加上线性变换 σ?

答 这说明不变子空间与线性变换有关. 一个线性空间的子空间对一个线性变换来说是不变子空间，但对另一个线性变换来说，就未必是不变子空间.

例如，P 数域，$V=\{(x_1,x_2,x_3)|x_i\in P\}$.

$\sigma(x_1\ x_2\ x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$

$\tau(x_1\ x_2\ x_3)=(0,x_2,x_3)$

易证 σ,τ 都是线性变换. 且

$\tau V=\{(0,a,b)|a,b\in P\}$, $\tau^{-1}(0)=\{(c,0,0)|c\in P\}$

都是 τ-子空间，但都不是 σ-子空间. 事实上，取 $(0,1,1)\in\tau(V)$

$$\sigma(0,1,1)=(-1,2,0)\overline{\in}\tau(V).$$

取 $(1,0,0)\in\tau^{-1}(0)$,

$$\sigma(1,0,0)=(2,0,1)\overline{\in}\tau^{-1}(0).$$

3. 设 W 为 σ-子空间，也为 τ-子空间，W 是否为 $(\sigma+\tau)$-子空间，$(\sigma\tau)$-子空间?

答 是. $\forall\alpha\in W$，由于 $\sigma\alpha\in W$，$\tau\alpha\in W$. 所以 $(\sigma+\tau)\alpha=\sigma\alpha+\tau\alpha\in W$. 故 W 是 $(\sigma+\tau)$-子空间.

$\forall\alpha\in W$，由条件知 $\tau\alpha\in W$，$\sigma(\tau\alpha)\in W$. 所以 $(\sigma\tau)\alpha=\sigma(\tau\alpha)\in W$. 故 W 是 $(\sigma\tau)$-子空间.

4. 若 W_1, W_2 都是 σ-子空间，W_1+W_2，$W_1\cap W_2$ 是否也为 σ-子空间？

答　是. 因为W_1+W_2，$W_1\cap W_2$ 都是 V 的子空间.

又 $\forall\alpha\in W_1+W_2$，$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1\in W_1$，$\alpha_2\in W_2$. 故 $\sigma(\alpha)=\sigma(\alpha_1+\alpha_2)=\sigma\alpha_1+\sigma\alpha_2$，又由条件知，$\sigma\alpha_1\in W_1, \sigma\alpha_2\in W_2$. 所以 $\sigma(\alpha)=\sigma\alpha_1+\sigma\alpha_2\in W_1+W_2$. 从而知 W_1+W_2 为 σ-子空间.

$W_1\cap W_2$ 类似可证. 此结论可推广为：若 $W_i(i=1,2,\cdots)$ 是 σ-子空间，则 $\bigcap\limits_i W_i$ 也是 σ-子空间.

5. 若 W 是 σ-子空间，且 σ 可逆，W 是否也为 σ^{-1}--子空间？

答　当 $\dim V=n$（有限）时，结论是对的. 事实上，当 $W=\{0\}$时显然. 当 $W\neq\{0\}$ 时，任取 W 的一组基 α_1 $\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，由于 W 对 σ 不变，且 σ 可逆，故 $\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_s$ 为 W 中 s 个线性无关的向量. 从而为 W 的基. 又由于 $\sigma W\subseteq W$，故 $\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2,\cdots,\sigma\alpha_s$ 也是 σW 的一组基，从而 $\sigma W=W$. 这样，任取 $\alpha\in W$，便有 $\beta\in W$，使 $\sigma\beta=\alpha$. 于是 $\sigma^{-1}\alpha=\beta\in W$. 即 W 也是 σ^{-1}-子空间.

但是，对于无限维线性空间来说，结论不真. 例如，令 P 为数域

$$V=\{\sum_{-\infty}^{+\infty}a_ix_i \mid a_i\in P\text{，只有有限个 } a_i\neq 0\}$$

规定 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}a_ix_i=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}b_ix_i \Longleftrightarrow$ 所有 $a_i=b_i$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}a_ix_i+\sum_{-\infty}^{+\infty}b_ix_i=\sum_{-\infty}^{+\infty}(a_i+b_i)x_i$$

$$k\sum_{-\infty}^{+\infty}a_ix_i=\sum_{-\infty}^{+\infty}ka_ix_i \qquad k\in P.$$

易证 V 为 P 上无限维线性空间. 定义 V 的一个变换 σ 如下：

$$\sigma\left(\sum_{+\infty}^{+\infty} a_i x_i\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i x_{i+1}$$

易证 σ 是 V 的一个可逆线性变换，且

$$\sigma(x_i) = x_{i+1},\quad \sigma^{-1}(x_i) = x_{i-1}\quad i=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

令 $W=L(x_0,x_1,x_2,\cdots)$ 显然 $\sigma(W)\subseteq W$. 但 $\sigma^{-1}(W)$ 不包含 W. 因为 $\sigma^{-1}x_0=x_{-1}\overline{\in} W$.

(三) 题型归类

1. 验证不变子空间

例 1 设 V 是数域 P 的线性空间，$\sigma\in L(V)$，$f(x)\in P[x]$，证明：$f(\sigma)V$ 和 $f(\sigma)^{-1}(0)$ 都是 σ-子空间.

证 设 $f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1x+a_0$，$a_i\in P$. 令

$$W_1=f(\sigma)V,\quad W_2=f(\sigma)^{-1}(0)$$

由于 $f(\sigma)$ 仍是 V 的线性变换. $\forall\alpha\in W_1$，则 $\alpha=f(\sigma)\beta$，其中 $\beta\in V$. 那么

$$\sigma(\alpha)=f(\sigma)(\sigma\beta)\in f(\sigma)V=W_1,$$

即证 W_1 为 σ-子空间.

$\forall\alpha\in W_2$，则 $f(\sigma)(\alpha)=0$，那么

$$f(\sigma)(\sigma(\alpha))=\sigma(f(\sigma)(\alpha))=\sigma(0)=0,$$

即证 $\sigma(\alpha)\in f(\sigma)^{-1}(0)=W_2$. 所以 W_2 也是 σ-子空间.

2. 求不变子空间

例 2 设 σ 是 R^2 的线性变换，σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$，试求 σ 的所有不变子空间.

解 显然 R^2 和$\{0\}$是 σ 的两个不变子空间. 若 W 为 σ 的非平凡的不变子空间，则 $\dim W=1$. 令 $W=L(\alpha)$，则

$\sigma(\alpha)=\lambda\alpha$. 即 α 为 λ 的特征向量. λ 为 σ 的实特征值. 但

$$|\lambda E-A|=\lambda^2+1$$

无实根，故上述 W 不存在. 即 σ 仅有两个不变子空间.

3. 不变子空间的证明

例 3 证明：n 维线性空间 V 的线性变换 σ 为数乘变换的充要条件是V 中每个一维子空间都是 σ的不子变空间

证 必要性 设 σ 为数乘变换，$\sigma\alpha=\lambda\alpha$, 令 $W=L(\alpha)$ 为 V 的任一个一维子空间，$\forall\beta\in W$，则 $\beta=k\alpha$，于是

$$\sigma\beta=\sigma(k\alpha)=k(\sigma\alpha)=(k\lambda)\alpha\in W.$$

故 W 为 σ-子空间.

充分性 设 $W=L(\alpha)$ 为 V 的某一个一维子空间，且为 σ-子空间，所以 $\sigma\alpha=\lambda\alpha$. 下证 σ 为数乘变换.

$\forall\beta\in V$. 则 $L(\beta)$ 也是 V 的一维子空间. 由假设知，$L(\beta)$ 是 σ-子空间. 设 $\sigma\beta=k\beta$，k 为任意实数，下证 $k=\lambda$.

(1) 若 $\beta\in W$，取 $\beta=l\alpha$，则 $\sigma\beta=l\sigma(\alpha)=l\lambda\alpha=\lambda\beta$.

(2) 若 $\beta\overline{\in}W$ ，则 α,β 线性无关，于是 $\alpha+\beta\neq0$，$L(\alpha+\beta)$ 也是一维子空间，且对 σ 不变，于是

$$\sigma(\alpha+\beta)=s(\alpha+\beta)=s\alpha+s\beta$$

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma\alpha+\sigma\beta=\lambda\alpha+k\beta$$

故
$$(s-\lambda)\alpha+(s-k)\beta=0$$

因 α，β 线性无关，所以 $s=\lambda=k$，即 $\sigma\beta=\lambda\beta$. 故对任意 $\beta\in V$，有 $\sigma\beta=\lambda\beta$. 即 σ 为数乘变换.

例 4 设复数域上 n 维线性空间 V 的线性变换，σ 在 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵是若当块，证明 V 不能分解成两个非平凡不变子空间的直和.

证 用反证法，设 $V=W_1\oplus W_2$，W_1,W_2 为两个非平凡

不变子空间，则 σ 在某组基下的矩阵为准对角形矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\0 & A_2\end{pmatrix}$，显然 A_1，A_2 为复数矩阵，则存在可逆矩阵 Q_1, Q_2 使 $B_1=Q_1^{-1}A_1Q_1$，$B_2=Q_2^{-1}A_2Q_2$ 为若当形矩阵，所以

$$\begin{pmatrix}Q_1 & 0\\0 & Q_2\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}Q_1 & 0\\0 & Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1 & 0\\0 & B_2\end{pmatrix}\overset{令}{=}B$$

即 B 与 A 相似，则 σ 在某组基下矩阵为若当形 B. 显然 B 是若当阵不是若当块，又从若当标准形唯一性得知，它与 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下矩阵为若当块矛盾.

4. 根向量

例 5 设 V 为数域 P 上的线性空间，σ 是 V 的一个线性变换，$\lambda\in P$，满足

$$(\sigma-\lambda I)^m\alpha=0.$$

的向量称为 σ 的关于 λ 高为 m 的根向量. 证明：

(1) $W_1=\{\alpha\,|\,(\sigma-\lambda I)^m\alpha=0,\ \alpha\in V\}$是 σ 的不变子空间；

(2) 令 W_2 为 σ 的关于 λ 的一切根向量作成的集合，则 W_2 作成一个 σ-子空间.

证 (1) 因为 $(\sigma-\lambda I)^m$ 也是 V 的线性变换，而 W_1 就是这个线性变换的核，故 W_1 为 σ-子空间.

(2) 任取 α，$\beta\in W_2$，可设

$$(\sigma-\lambda I)^m\alpha=0 \qquad (\sigma-\lambda I)^n\beta=0$$

且 $m\leqslant n$，则有

$$(\sigma-\lambda I)^n(k_1\alpha+k_2\beta)=k_1(\sigma-\lambda I)^n\alpha+k_2(\sigma-\lambda I)^n\beta=0$$

故 W_2 作为 V 的子空间. 从而易知 W_2 为 σ-子空间.

§5 综合题

例 1 （华中师大研究生入学试题）设 A，B，C，D 是 $P^{n\times n}$ 中四个方阵．证明：

(1) $\sigma(X)=AXB+CX+XD$是 $P^{n\times n}$ 的一个线性变换；

(2) 当 $C=D=0$时，σ 是可逆变换的充要条件是 A，B 都是可逆矩阵．

证 (1) 设 X、$Y\in P^{n\times n}$，则

$$\begin{aligned}\sigma(X+Y)&=A(X+Y)B+C(X+Y)+(X+Y)D\\&=(AXB+CX+XD)+(AYB+CY+YD)\\&=\sigma X+\sigma Y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(kX)&=A(kX)B+C(kX)+(kX)D\\&=k(AXB+CX+XD)\\&=k\sigma(X),\end{aligned}$$

故 σ 是 $P^{n\times n}$ 的一个线性变换．

(2) 当 $C=D=0$ 时，则 $\sigma(X)=AXB$.设 σ 是可逆变换，下证 A，B 都是可逆矩阵．

用反证法．若 A 为不可逆，即$|A|=0$．从而可知，存在一个非零 n 阶方阵 H，使 $AH=0$，于是 $\sigma H=AHB=OB=0$．所以 $\sigma^{-1}(\sigma H)=0$，即 $H=0$，矛盾．对 B 不可逆时也可类似证明．故 A、B 都是可逆矩阵．

反之，设 A，B 为可逆矩阵

当 $X\neq Y$ 时，显然 $AXB\neq AYB$，所以 σ 又是单射，故 σ 是可逆变换．（由于 $P^{n\times n}$ 是有限维成性空间，只证 σ 是单射或是满射即可）．

例 2 设 σ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，V_1 与 V_2 是 V 的两个子空间，且 $V=V_1\oplus V_2$．证明：σ 是可

逆变换$\Longleftrightarrow V=\sigma V_1\oplus\sigma V_2$.

证 必要性 设 σ 是可逆变换，$\forall\alpha\in V$，则由 $V=V_1\oplus V_2$，有 $\sigma^{-1}\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，其中 $\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2$，两端以 σ 作用得 $\alpha=\sigma\alpha_1+\sigma\alpha_2$，即

$$V=\sigma V_1+\sigma V_2.$$

又设 $\alpha\in\sigma V_1\cap\sigma V_2$，则有 $\beta_1\in V_1$，$\beta_2\in V_2$，使

$$\alpha=\sigma\beta_1,\quad \alpha=\sigma\beta_2.$$

但由于 σ 是可逆变换，且 $V_1\cap V_2=\{0\}$，故

$\beta_1=\sigma^{-1}\alpha=\beta_2\in V_1\cap V_2$，从而 $\beta_1=0$，$\alpha=0$. 所以

$$\sigma V_1\cap\sigma V_2=\{0\}$$

于是

$$V=\sigma V_1\oplus\sigma V_2.$$

充分性 设 $V=\sigma V_1\oplus\sigma V_2$，任取 $\beta\in V$，且令 $\beta=\sigma\alpha_1+\sigma\alpha_2$，$\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2$，再令 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，于是有 $\sigma\alpha=\sigma\alpha_1+\sigma\alpha_2=\beta$. 即 σ 是满射，又由于V是有限维空间，所以 σ是可逆变换.

例 3 设 T 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$T^2=T$，证明

1) $V=TV\oplus T^{-1}(0)$;

2) （武汉大学研究生入学试题）V 中任何向量 x 恒可唯一地表示 $x=u+v$ 的形式 $(u,v\in V)$，使得

$$Tu=u,\quad Tv=0.$$

3) （新疆大学研究生入学试题）设 $V_1=\{T\alpha\mid\alpha\in V\}$，$V_2=\{\alpha-T\alpha\mid\alpha\in V\}$ 则 $V=V_1\oplus V_2$

证 1) $\forall\alpha\in TV\cap T^{-1}(0)$，则 $\alpha=T\beta$，$T\alpha=0$，其中 $\beta\in V$. 则

$$0=T\alpha=T^2\beta=T\beta=\alpha$$

即 $TV\oplus T^{-1}(0)$是直和，又

$$\dim V=\dim TV+\dim T^{-1}(0)$$

$$\therefore \qquad V=TV\oplus T^{-1}(0)$$

2）由上一问知，$\forall x\in V$，则唯一表示为

$$x=u+v \quad u\in TV,\ v\in T^{-1}(0) \quad \therefore \quad Tv=0$$

存在 $\beta\in V$，$u=T\beta$

$$\therefore \qquad Tu=T^2\beta=T\beta=u.$$

3）$V_1=TV$，下证 $V_2=T^{-1}(0)$，则由 1）即证.

$\forall\ \alpha-T\alpha\in V_2$，则 $T(\alpha-T\alpha)=0$，$\therefore\ \alpha-T\alpha\in T^{-1}(0)$
此即 $V_2\subseteq T^{-1}(0)$. 反之，$\forall x\in T^{-1}(0)$，则$Tx=0$

$$\therefore \qquad x=x-Tx\in V_2$$

此即 $T^{-1}(0)\subseteq V_2$.

例 4 （武汉大学研究生入学试题） 设 E 是由次数不超过 4 的一切实系数一元多项式和零多项式组成的向量空间. 对于 E 中任意 $f(x)$，以 x^2-1 除所得商及余式分别为 $q(x)$和$r(x)$，即

$$f(x)=q(x)(x^2-1)+r(x)$$

设 φ 是 E 到 E 的映射，使 $\varphi(f(x))=r(x)$. 试证 φ 是一个线性变换，并求它关于基底 $1,x,x^2,x^3,x^4$ 的矩阵.

证 $\forall f_1(x),f_2(x)$ 用 x^2-1 除，所得商式及余式如下

$$f_1(x)=q_1(x)(x^2-1)+r_1(x)$$
$$f_2(x)=q_2(x)(x^2-1)+r_2(x)$$

并对任意实数k，l

$$\varphi(kf_1(x)+lf_2(x))=kr_1(x)+lr_2(x)$$
$$=k\varphi(f_1(x))+l\varphi(f_2(x))$$

所以 φ 是 E 的线性变换.

设 φ 在基 $1,x,x^2,x^3,x^4$ 下的矩阵为 A，则可以求出

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

例 5 （第三届全国大学生数学夏令营试题） 设 σ 为 n 维线性空间 L 中的幂零线性变换，即存在自然数 N，使 $\sigma^{N-1}\neq 0,\sigma^N=0$. 试证：在 L 中存在一组基

$$\alpha_1,\sigma\alpha_1,\ \cdots,\sigma^{N_1-1}\alpha_1\qquad(\sigma^{N_1}\alpha_1=0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_s,\sigma\alpha_s,\ \cdots,\sigma^{N_s}\alpha_s\qquad(\sigma^{N_s}\alpha_s=0)$$

其中 $N_1,\cdots,N_s$ 为自然数.

证 若 $\alpha\in V$，有 $\sigma^{N-1}\alpha\neq 0$，$\sigma^N\alpha=0$，称 α 的高度为 N. 令 $W=L(\alpha,\ \sigma\alpha,\ \cdots,\ \sigma^{N-1}\alpha)$. 则 W 是 σ 的不变子空间，且 $\dim W=N$，并称 W 为循环子空间. 下面只要证明：V 可以分解为若干个循环子空间的直和即可.

在 V 中取维数最大的循环子空间为 W. 且

$$W=L(\alpha,\sigma\alpha,\ \cdots,\sigma^{m-1}\alpha),\ \dim W=m. \qquad (1)$$

即

$$\sigma^{m-1}\alpha\neq 0,\ \sigma^m\alpha=0 \qquad (2)$$

若 $m=n$ 则命题证毕.

若 $m<n$. 讨论与 W 交为 $\{0\}$ 的一切不变子空间，记其中最大维数的不变子空间为 H. 令

$$M=W\oplus H \qquad (3)$$

下证 $V=M$. 但 $M\subseteq V$，只要证 $V\subseteq M$.

对 V 中向量的高度用数学归纳法. V 中高度为 0 的向

量，只有唯一零向量 $0\in M$。

归纳假设 V 中高度为 k 的向量 $\gamma\in V$，都有 $\gamma\in M$。再取 V 高度为 $k+1$ 的向量 β，下证 $\beta\in M$.

$$0=\sigma^{k+1}\beta=\sigma^{k}(\sigma\beta) \tag{4}$$

即 $\sigma\beta$ 的高度为 k，由归纳假设 $\sigma\beta\in M=W\oplus H$，

$$\sigma\beta=\alpha_1+\alpha_2,\ 其中\ \alpha_1\in W,\ \alpha_2\in H. \tag{5}$$

用 σ^{k} 作用（5）式，得

$$0=\sigma^{k}\alpha_1+\sigma^{k}\alpha_2 \tag{6}$$

由于W与H均为σ的不变子空间，所以 $\sigma^{k}\alpha_1\in W$，$\sigma^{k}\alpha_2\in H$.
而 W 与 H 是直和，则由（6）式知

$$\sigma^{k}\alpha_1=\sigma^{k}\alpha_2=0. \tag{7}$$

由 $\alpha_1\in W$，则

$$\alpha_1=k_0\alpha+k_1\sigma\alpha+\cdots+k_{m-1}\sigma^{m-1}\alpha \tag{8}$$

用 σ^{m-1} 作用，并注意 $k+1\leqslant m$，$k\leqslant m-1$ 则

$$0=\sigma^{m-1}\alpha_1=k_0\sigma^{m-1}\alpha$$

但 $\sigma^{m-1}\alpha\neq 0$，$\therefore k_0=0$. 则由（8）式得

$$\alpha_1=\sigma(k_1\alpha+\cdots+k_{m-1}\sigma^{m-2}\alpha)=\sigma\alpha_3 \tag{9}$$

其中

$$\alpha_3=k_1\alpha+\cdots+k_{m-1}\sigma^{m-2}\alpha\in W \tag{10}$$

由（5），（9）两式得

$$\sigma\beta=\sigma\alpha_3+\alpha_2\ 或\ \alpha_2=\sigma(\beta-\alpha_3)\in H \tag{11}$$

令

$$T=L(\beta-\alpha_3)+H \tag{12}$$

$\forall\gamma\in l(\beta-\alpha_3)+\alpha_4\in T$，其中 $\alpha_4\in H$.

$$\sigma\gamma=l\sigma(\beta-\alpha_3)+\sigma\alpha_4=l\alpha_2+\sigma\alpha_4\in H\subseteq T,$$

即证 T 为 σ 的不变子空间.

1）当 $T=H$ 时，则 $\beta-\alpha_3\in H$（由(12)式知），令

$$\beta-\alpha_3=\alpha_5\in H \qquad \therefore \qquad \beta=\alpha_3+\alpha_5\in W+H=M$$

即证 $V\subseteq M$. 证毕.

2) 当 $T\neq H$，则 H 是 T 的真子空间. 由于 H 是与 W 交为$\{0\}$的最大不变子空间，所以 $T\cap W\neq\{0\}$. 令 $\alpha_6\in T\cap W$，$\alpha_6\neq 0$. 因为 $\alpha_6\in W$，$\alpha_6\in T$. 则

$$\alpha_6=k(\beta-\alpha_3)+\alpha_7 \quad 其中\ \alpha_7\in H \tag{12}$$

可证 $k\neq 0$. 否则若 $k=0$，则 $\alpha_6=\alpha_7\in H$，这与 $W\cap H=\{0\}$矛盾. 所以 $k\neq 0$. 则由 (12) 式得

$$\beta=\left(\alpha_3+\frac{1}{k}\alpha_6\right)-\frac{1}{k}\alpha_7\in W+H \quad \therefore V\subseteq M.$$

从而得证 $V=W\oplus H$，其中 W 是循环子空间，H 是 σ 的不变子空间. 把 H 看成 V，则 $H=H_1\oplus H_2$，其中 H_1 是循环子空间，H_2 是 σ 的不变子空间. 这样继续下去，经过有限步，则

$$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$$

其中 W_i 都是循环子空间，从而命题证毕.

第十章　欧氏空间与酉空间

§1　欧氏空间

（一）内容提要

1．实数域 R 上线性空间 V，已经有向量加法与数乘向量两种运算，再定义了第三种运算内积 $(\alpha,\beta)\in R$，则称 V 为欧氏空间．

2．内积 (α,β) 具有以下五个性质：$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$

1）$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$；

2）$(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$；　$\forall k\in R$，

3）$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$；

4）$(\alpha,\alpha)\geqslant 0$；

5）$(\alpha,\alpha)=0 \Longleftrightarrow \alpha=0$．

3．两种常用的欧氏空间的内积

1）$V=R^n=\{(x_1,\cdots,x_n)'|x_i\in R\}$，$V$ 中两个向量 $\alpha=(x_1,\cdots,x_n)'$，$\beta=(y_1,\cdots,y_n)'$　则定义内积为

$$(\alpha,\beta)=\alpha'\beta=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \tag{1}$$

2）$V=C(a,b)$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上连续函数全体．$\forall f(x),g(x)\in V$，可以定义内积：

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx \tag{2}$$

4．V 是 n 维欧氏空间，$V=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$

1）当 $(\alpha_i,\alpha_j)=0$ $(i\neq j)$ 时，称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组

正交基.

2）当 $(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$ 时，称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为V 的一组标准正交基.

3）当 $V=R^n$ 时，$V=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，令 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，在内积（1）的意义下，则

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_n \text{为正交基} \Longleftrightarrow A'A=\begin{pmatrix}c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n\end{pmatrix},$$

其中 $c_i>0$.

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_n \text{为标准正交基} \Longleftrightarrow A'A=E.$$

4）n 维欧氏空间中任一组基一定可通过施密特（Schmidt）方法变为一组标准正交基，且过渡矩阵为上三角阵. 即V 为一组基为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，将它用施密特法变为标准正交基 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 后，则

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\gamma_1\cdots\gamma_n)T$$

其中

$$T=\begin{pmatrix}t_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn}\end{pmatrix}, \quad t_{ii}>0$$

5. **实数域 R 上两个有限维欧氏空间同构的充要条件是它们具有相同的维数.**

6. V_1，V_2 是欧氏空间 V 的两个子空间，如果满足下面两个条件：

1）$V=V_1+V_2$

2）$(\alpha,\beta)=0 \quad \forall\alpha\in V_1,\ \beta\in V_2$.

则称 V_2（或 V_1）为 V_1（或 V_2）的正交补. 记为 $V_2=V_1^{\perp}$.

欧氏空间 V 的每一个子空间 V_1 都有唯一的正交补 $V_1^{\perp}$.

7. 设 A 是 $n\times n$ 实对称阵，则存在正交阵 T 使 $T'AT=T^{-1}AT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个实特征值.

8. V 是欧氏空间，内积满足：

1）$(\alpha,\beta)^2\leqslant(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta)$，（柯西不等式）

2）$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$，（三角不等式）

9. V 是 n 维欧氏空间，$V=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，令 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，其中 $a_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)$，则称 A 为格拉姆 (Gram) 矩阵. 格拉姆阵都是正定的.

（二）答疑辅导

1. 实数域上同一线性空间是否可以用不同方式来定义内积？如果可以的话，它们算不算同一欧氏空间？

答　可以用不同方式定义内积，比如 $V=R^n$，V 中任意两个向量 $\alpha=(x_1,\cdots,x_n)'$，$\beta=(y_1,\cdots,y_n)'$，定义内积

$$(\alpha,\beta)=k\alpha'\beta$$

其中 k 为正实数. 不同的 k 就是不同的内积（当 $k=1$ 就是常用的内积）. 换句话说在 R^n 上可以定义无穷种不同的内积.

欧氏空间是具有三种运算的代数结构，一种是向量加法，一种数乘向量，一种内积. 同一线性空间，不同内积（即第三种运算不同），就是不同的欧氏空间. 换句话说，同一个集合，在实数域上如果上述三种运算都相同时，才是同一个欧氏空间，否则就是不同的欧氏空间.

2. 是不是实数域 R 上任一个有限维线性空间 V 都可以定义一个内积？

答　可以. 取 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$. 对 α, $\beta\in V$，那么 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$，$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_n\alpha_n$. 定义

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}k_i l_i \qquad (1)$$

则可证（1）式定义的是一个内积.

3．$V=R^{n\times n}$ 是实数域 R 上的线性空间，常用的内积是什么？

答　$A,B\in V$，定义

$$(A,B)=\operatorname{tr} A'B \qquad (2)$$

下证（2）式是内积．$\forall A,B,C\in V$，$k\in R$，$A=(a_{ij})$ 则

$$(A,B)=\operatorname{tr} A'B=\operatorname{tr} B'A=(B,A).$$

$$(A+B,C)=\operatorname{tr}(A+B)'C=\operatorname{tr} A'C+\operatorname{tr} B'C=(A,C)+(B,C)$$

$$(kA,B)=\operatorname{tr}(kA)'B=k\operatorname{tr} A'B=k(A,B)$$

$$(A,A)=\operatorname{tr} A'A=\sum_{i,j}a_{ij}^2\geqslant 0$$

$$(A,A)=0 \iff a_{ij}=0 \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \iff A=0$$

所以 $(A,B)=\operatorname{tr} A'B$ 为 $R^{n\times n}$ 的一个内积.

4．正交和与直和有没有区别？

答　$V=V_1\oplus V_2$ 是直和，$V=V_1+V_1^{\perp}$ 称为正交和．正交和一定是直和，即若 $V=V_1+V_1^{\perp}$，则 $V=V_1\oplus V_1^{\perp}$．但直和不一定是正交和．比如在 $V=R^2$ 中，规定内积为普通内积，$V_1=L(\alpha)$，$V_2=L(\beta)$，其中 $\alpha=(1,1)'$，$\beta=(1,2)'$，那么，$V=V_1\oplus V_2$．但它们不是正交和．因为 $(\alpha,\beta)=\alpha'\beta=3\neq 0$.

（三）题型归类

1．验证欧氏空间

例1　设 $\alpha=(a_1,a_2)$，$\beta=(b_1,b_2)$，为二维线性空间 R^2 中任意两个向量，$p,q\in R$，规定

$$(\alpha,\beta)=pa_1b_2+qa_2b_1 \qquad (1)$$

问是否作成欧氏空间？

解 当 p,q 中有一非正时，(1) 式不是内积．比如 $p\leqslant 0$，取 $\alpha=(1,0)$，则 $(\alpha,\alpha)=p\leqslant 0$ 矛盾．当 $p>0$、$q>0$ 时，易证 (1) 式是内积．从而 R^2 在此内积下为欧氏空间．

例2 （华东纺织工业大学研究生入学试题） n 维欧氏空间 V 中向量 x,y 的内积记为 (x,y)，T 为 V 的线性变换；若规定二元函数

$$(x,y)=(T(x),T(y)). \qquad (1)$$

问 (x,y) 是否为内积？

答 不一定，比如 $T=0$ 不是内积，$T=I$ 为恒等变换，又是内积．

2．计算夹角

例3 设 $V=C(-1,1)$，计算夹角 $\langle 1,x^2\rangle$ （内积按通常定义）．

解 $\cos^2\langle 1,x^2\rangle=\dfrac{(1,x^2)^2}{(1,1)(x^2,x^2)}$

$$(1,x^2)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3},$$

$$(1,1)=2, \qquad (x^2,x^2)=\frac{2}{5}$$

$\therefore\ \cos\langle 1,x^2\rangle=\dfrac{\sqrt{5}}{3}, \qquad \langle 1,x^2\rangle=\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{3}.$

3．求正交基

例4 （日本庆应义塾大学研究生入学试题）

1）在内积空间中，当给定线性无关的矢量 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 时，试用 Gram-Schmidt 步骤构造正交系．

2）在三维欧氏（Euclid）空间 R^3 中，从已知的三个矢量：$\beta_1=(3,0,4)$，$\beta_2=(-1,0,7)$，$\beta_3=(2,9,11)$，使用1）

的方法，求正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

解 1）令 $y_1=x_1$,

$$y_2=x_2-\frac{(x_2,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n=x_n-\frac{(x_n,y_1)}{(y_1,y_1)}y_1-\cdots-\frac{(x_n,y_{n-1})}{(y_{n-1},y_{n-1})}y_{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

则 $y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$ 即为正交系.

2）按上述步骤，令

$$\alpha_1=\beta_1=(8,0,4)$$

$$\alpha_2=\beta_2-\frac{(\beta_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=(-4,0,3)$$

$$\alpha_3=\beta_3-\frac{(\beta_3,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1-\frac{(\beta_3,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2$$

$$=(0,3,0).$$

例5 $V=C(0,2\pi)$ 求由下面向量组

$$1,\cos x,\sin x\cdots,\cos nx,\sin nx \tag{1}$$

生成的子空间 W 的一组标准正交组.

解 由于

$$(1,\cos mx)=\int_0^{2\pi}\cos mx dx=0,$$

$$(1,\sin mx)=0,$$

$$(\cos mx,\cos kx)=\int_0^{2\pi}\cos mx\cos kx\,dx=0\ (m\neq k)$$

$$(\sin mx,\sin kx)=0\quad (m\neq k)$$

$$(\sin mx,\cos kx)=0$$

因此向量组（1）为正交向量组. 要求 W 的标准正交基，只要将每个向量单位化即可.

$$(1,1)=2\pi,$$

$$(\cos mx,\cos mx)=\pi,$$

$$(\sin mx,\sin mx)=\pi.$$

因此 W 的一组标准正交基为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \cdots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx.$$

4．求与一组向量同时正交的向量

例6 在 R^4 中，找两个单位向量，使它们同时与向量：$\alpha=(2,1,4,0)$，$\beta=(-1,-1,2,2)$，$\gamma=(3,2,5,4)$ 中每一个正交.

解 设向量 (x_1,x_2,x_3,x_4) 与 α,β,γ 正交，则

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=0.$$

求出基础解系 $\delta=(10,-12,-2,1)$，$|\delta|=\sqrt{249}$，则

$$\pm\frac{1}{\sqrt{249}}(10,-12,-2,1)$$

即为所求.

5．求正交阵，将实对称阵对角化.

例 7 （日本広岛大学研究生入学试题）

1）试求将 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 对角化的正交阵；

2）关于矩阵 $e^{i\pi A/2}$，求使它对角化的正交阵.

解 1）$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$. 特征值为1，1，4.

求出 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量为

$$\alpha_1=(-1,1,0),\ \alpha_2=(-1,0,1)$$

用 Schmidt 正交化后为

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0),\ \beta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2).$$

求出 $\lambda=4$ 的单位特征向量为

$$\beta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

令 $T=(\beta_3,\beta_1,\beta_2)$ 则

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(4,1,1). \tag{2}$$

2) 定义 $e^A=E+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^k+\cdots$

$$=\lim_{n\to\infty}S_n$$

其中

$$S_n=E+\frac{1}{2}A+\cdots+\frac{1}{n!}A^n. \tag{2}$$

由(2)式及题设有

$$S_n=E+\frac{i\pi}{2}A+\frac{(i\pi)^2}{2!}A^2+\cdots+\frac{(i\pi)^n}{n!}A^n$$

$$T^{-1}S_nT=E+\frac{i\pi}{2}T^{-1}AT+\cdots+\frac{(i\pi)^n}{n!}T^{-1}A^nT$$

$$=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}+\frac{i\pi}{2}\begin{pmatrix}4&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}+\cdots+\frac{\left(\frac{i\pi}{2}\right)^n}{n!}\begin{pmatrix}4^n&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$$

$$T^{-1}e^{i\pi A/2}T=\lim_{n\to\infty}T^{-1}S_nT$$

$$=\mathrm{diag}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\pi i)^n}{n!},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{i\pi}{2}\right)^n}{n!},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{i\pi}{2}\right)^n}{n!}\right)$$

$$=\mathrm{diag}(e^{2\pi i},\ e^{\frac{\pi}{2}i},e^{\frac{\pi}{2}i})$$

$=\text{diag}(1,i,i)$

故 T 也可使 $e^{i\pi A/2}$ 对角化.

6. 格拉姆行列式

例 8 设$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$是欧氏空间一组线性无关的向量，$\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$是由这组向量，通过正交化方法所得正交组，证明：这两个向量组的格拉姆行列式相等，即

$$|G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)|=|G(\beta_1\cdots\beta_n)|=\prod_{i=1}^{n}(\beta_i,\beta_i)$$

其中

$$G(\alpha_1\cdots\alpha_n)=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n)\\ \vdots & & \vdots\\ (\alpha_n,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}.$$

证 由施密特正交化方法过程知

$$(\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_2)\begin{pmatrix}1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}=(\alpha_1\cdots\alpha_n)T.$$

令 $V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，那么把 V_1 看成一个线性空间，它也是欧氏空间，且

$$V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=L(\beta_1,\cdots,\beta_n).$$

那么 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 都是 V_1 的基，其过渡矩阵为 T，由于它们的度量矩阵是合同的，从而有

$$G(\beta_1\cdots\beta_n)=T'G(\alpha_1\cdots\alpha_n)T.$$

两边取行列式，并注意到$|T|=1$，则有

$$|G(\alpha_1\cdots\alpha_n)|=|G(\beta_1\cdots\beta_n)|.$$

由于

$$G(\beta_1\cdots\beta_n)=\text{diag}((\beta_1,\beta_1),\ (\beta_2,\beta_2),\cdots(\beta_n,\beta_n))$$

$$\therefore\quad |G(\beta_1\cdots\beta_n)|=\prod_{i=1}^{n}(\beta_1,\beta_i).$$

7. 正交补

例 9 （日本広岛大学研究生入学试题） W 是有限维实线性空间，已定义内积$(,)$. 当 V_1，V_2 为 W 的子空间时，试证：

1）设和 V_1 中任一矢量都正交的矢量全体组成的集合为 $V_1^\perp$时，则 $V_1^\perp$ 为 W 的子空间；

2）$W=V_1\oplus V_1^\perp$；

3）$(V_1^\perp)^\perp=V_1$；

4）$(V_1+V_2)^\perp=V_1^\perp\cap V_2^\perp$.

证 1）2）证明留给读者自己去做.

3）由2）知 $W=V_1\oplus V_1^\perp$，由于 V_1 与 $V_1^\perp$ 的地位是对称的. 也可把 V_1 看成 $V_1^\perp$ 的正交补，所以 $V_1=(V_1^\perp)^\perp$.

4）$\forall\alpha\in(V_1+V_2)^\perp$，$\forall\beta\in V_1$，$\beta\in V_1+V_2$，所以 $(\alpha,\beta)=0$，则 $\alpha\in V_1^\perp$. 类似可知 $\alpha\in V_2^\perp$. 则 $\alpha\in V_1^\perp\cap V_2^\perp$. 从而$(V_1+V_2)^\perp\subseteq V_1^\perp\cap V_1^\perp$.

反之，$\forall\alpha\in V_1^\perp\cap V_2^\perp$，任取 $\beta\in V_1+V_2$，则 $\beta=\beta_1+\beta_2$ 其中 $\beta_1\in V_1$，$\beta_2\in V_2$，但 $\alpha\in V_1^\perp$，$\alpha\in V_2^\perp$，所以

$$(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)=0$$

则 $\alpha\in(V_1+V_2)^\perp$，此即 $V_1^\perp\cap V_2^\perp\subseteq(V_1+V_2)^\perp$. 综上即证.

8．三角不等式

例10 （吉林大学研究生入学试题） 1）设 A 半正定，证明

$$(x'Ay)^2\leqslant(x'Ax)(y'Ay).$$

2）设 A 正定，证明：$(x'y)^2\leqslant(x'Ax)(y'A^{-1}y)$.

证 1）由 A 半正定，那么存在半正定阵 B，使得 $A=B'B$. 在三角不等式

$$(\alpha,\beta)^2\leqslant(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta)\qquad(1)$$

中，令 $\alpha=Bx$，$\beta=By$. 那么

$$(\alpha,\beta)^2=(\alpha'\beta)^2=(x'B'By)^2=(x'Ay)^2,$$

$$(\alpha,\alpha)=x'Ax,\quad (\beta,\beta)=y'Ay.$$

代入(1)即证1).

2) A 正定，存在正定阵 C，使 $A=C'C$. 再在(1)式中，令 $\alpha=Cx$，$\beta=C^{-1}y$. 那么

$$(\alpha,\beta)^2=(\alpha'\beta)^2=(x'CC^{-1}y)^2=(x'y)^2$$

$$(\alpha,\alpha)=x'Ax,\qquad (\beta,\beta)=y'A^{-1}y.$$

代入(1)式，又得证2).

§2 酉空间

(一) 内容提要

1. V 是复数域 K 上线性空间，在 V 上定义一个二元复函数 $(\alpha,\beta)\in K$. 满足

1) $(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$;

2) $(l\alpha,\beta)=l(\alpha,\beta)$; $\forall l\in K$;

3) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

4) (α,α)是非负实数;

5) $(\alpha,\alpha)=0\Longleftrightarrow\alpha=0$.

其中 $\alpha,\beta,\gamma\in V$. 则称此二元复函数为内积.

2. 复数域 K 上线性空间 V，定义了内积，则称 V 为酉空间.

3. n 维线性空间 K^n，对向量

$$\alpha=(a_1,\cdots,a_n),\quad \beta=(b_1\cdots,b_n)$$

可定义内积为

$$(\alpha,\beta)=\alpha\overline{\beta}'=a_1\overline{b}_1+\cdots+a_n\overline{b}_n$$

4. $|(\alpha,\beta)|^2\leqslant(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta)$

当且仅当 α,β 线性相关时，等号成立.

5. $A\in K^{n\times n}$，如果 $\bar{A}'A=A\bar{A}'=E$，称 A 为酉矩阵（它是正交阵的推广）.

6. $A\in k^{n\times n}$，如果 $\bar{A}'=A$，称 A 为厄米特阵（它是实对称阵的推广）.

（二）答疑辅导

1. 等式$(\alpha, l\beta)=l(\alpha,\beta)$和$(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$是否成立？

答 第一个式子一般不成立，第二个成立. 因为

$$(\alpha,l\beta)=(\overline{l\beta,\alpha})=\bar{l}(\overline{\alpha,\beta})=\bar{l}(\alpha,\beta).$$

由此可见一般当 l 为实数时第一个式子才成立.

$$(\alpha,\beta+\gamma)=(\overline{\beta+\gamma,\alpha})=(\overline{\beta,\alpha})+(\overline{\gamma,\alpha})$$
$$=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma).$$

2. 复数域 K 上线性空间 V是否都可以定义内积，而成为酉空间呢？

答 可以. 比如取 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$. 又设 $\alpha=x_1\varepsilon_1+\cdots+x_n\varepsilon_n$，$\beta=y_1\varepsilon_1+\cdots+y_n\varepsilon_n$. 定义

$$(\alpha,\beta)=x_1\bar{y}_1+\cdots+x_n\bar{y}_n.$$

则可验证它是内积. 从而 V 为酉空间.

与欧氏空间一样，这样的内积定义不是唯一的. 当然对于同一个 V 不同的内积，形成不同的酉空间.

3. 怎样求酉空间的标准正交基？

答 酉空间中也有施密特正交化法. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基，令

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_n=\alpha_n-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(\alpha_n,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i.$$

则 $(\beta_i,\beta_j)=0\ (i\neq j)$

再将 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 单位化，即令

$$\gamma_i=\frac{1}{|\beta_i|}\beta_i\quad(i=1,2,\cdots n)$$

则 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 为 V 的一组标准正交基.

下面举一个例子，设 $V=K^3$，取 V 的一组基：

$$\alpha_1=(1,0,-i),\ \alpha_2=(0,1,0),\ \alpha_3=(2+i,0,1)$$

由于 α_1,α_2 已经正交，所以令

$$\beta_1=\alpha_1,\ \beta_2=\alpha_2,$$

$$\begin{aligned}\beta_3&=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2\\&=(2+i,0,1)-\frac{2+2i}{2}(1,0,-i)-\frac{0}{1}\beta_2\\&=(1,0,i)\end{aligned}$$

再将它们单位化

$$\gamma_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-i)$$

$$\gamma_2=\beta_2=(0,1,0)$$

$$\gamma_3=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i)$$

则 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 为 V 的一组标准正交基.

4. 在欧氏空间中，两组标准正交基之间的过渡矩阵为正交阵，在酉空间中呢？

答 在酉空间中，两组标准正交基之间的过渡矩阵为酉

矩阵．设 V 为 n 维酉空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为 V 的两组基，从第一组到第二组的过渡矩阵为 A，则

$$(\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A \tag{1}$$

1）$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为标准正交基；

2）$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为标准正交基；

3）A 为酉矩阵．

则上述三句话中有两个成立时，另一个也一定成立．

先证由1），2）$\Longrightarrow$3）．

设 $\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0$（$i\neq j$），$A=(a_{ij})$．由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为标准正交基，所以

$$\delta_{ij}=(\beta_i,\beta_j)=a_{1i}\bar{a}_{1j}+\cdots+a_{ni}\bar{a}_{nj} \tag{2}$$

由（2）式即知 $\bar{A}'A=E$．

再证1)，3)$\Longrightarrow$2)．由于 A 为酉矩阵，所以

$$a_{1i}\bar{a}_{1j}+\cdots+a_{ni}\bar{a}_{nj}=\delta_{ij},$$

由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为标准正交基，从而有

$$(\beta_i,\beta_j)=a_{1i}\bar{a}_{1j}+\cdots+a_{ni}\bar{a}_{nj}=\delta_{ij}$$

得证 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为标准正交基．

最后证2)，3)$\Longrightarrow$1)．由（1）式可得

$$(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\beta_1\cdots\beta_n)A^{-1} \tag{3}$$

A 是酉矩阵，$\bar{A}'A=A\bar{A}'=E$，两边取逆得

$$E=A^{-1}\overline{(A^{-1})'}=\overline{(A^{-1})'}A^{-1}$$

故 A^{-1} 也是酉矩阵．由（3）式及上面已证结论，可知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为标准正交基．

5．厄米特矩阵有哪些主要性质？

答　厄米特矩阵是实对称阵的推广，它有下面三个和实对称阵类似的性质：

1）厄米特矩阵的特征值均为实数；

2）属于不同特征值的特征向量必正交（内积为0）；

3）任意 n 阶厄米特矩阵 A，一定存在 n 阶酉矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角阵.

我们先证1). 设 a 为酉矩阵 A 的一个特征值，它的相应的特征向量为 β，则 $A\beta=a\beta$. 那么，由 $A=\bar{A}'$，得

$$\overline{\beta'}A\beta=\overline{\beta'}\bar{A}'\beta=\overline{(A\beta)'}\beta=\overline{(a\beta)'}\beta=\bar{a}\overline{\beta'}\beta,$$

$$\overline{\beta'}A\beta=\overline{\beta'}a\beta=a\overline{\beta'}\beta,$$

$$\therefore\quad a\overline{\beta'}\beta=\bar{a}\overline{\beta'}\beta,\ a=\bar{a},$$

即证 a 为实数.

再证2). 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 为酉矩阵 A 的 m 个互不相同的特征值(均为实数)，其相应的特征向量为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，那么

$$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

用归纳法证明，当 $m=1$ 时，结论显然成立，假设结论对 $m-1$ 成立. 再证对 m 成立，设

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0\tag{1}$$

则 $$0=k_1A\alpha_1+\cdots+k_mA\alpha_m=k_1\lambda_1\alpha_1+\cdots+k_m\lambda_m\alpha_m\tag{2}$$

$$0=k_1\lambda_m\alpha_1+\cdots+k_m\lambda_m\alpha_m\tag{3}$$

(3)－(2) 得

$$k_1(\lambda_m-\lambda_1)\alpha_1+\cdots+k_{m-1}(\lambda_m-\lambda_{m-1})\alpha_{m-1}=0\tag{4}$$

由归纳假设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性无关以及 $\lambda_m-\lambda_i\neq0$，可得

$$k_1=\cdots=k_{m-1}=0,\tag{5}$$

再将(5)式代入(1)，可证 $k_m=0$. 从而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

至于结论3) A为正规阵，在p.264第8章§2答疑辅导2.已证.

6. 什么叫厄米特二次型？

答　设 A 为 n 阶厄米特阵，则二次齐次函数

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\bar{X}'AX=\Sigma a_{ij}x_i\bar{x}_j$$

称为厄米特二次型.

由上面已知，存在酉矩阵 T，使

$$T^{-1}AT=\bar{T}'AT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

故存在可逆变换 $X=TY$，使

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\lambda_1 y_1\bar{y}_1+\cdots+\lambda_n y_n\bar{y}_n$$

$$=\bar{Y}'\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)Y.$$

其中　$X=(x_1,\cdots,x_n)'$，$Y=(y_1,\cdots,y_n)'$.

（三）题型归类

1. 化厄米特阵为对角阵

例1　已知

$$A=\frac{1}{6\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{6} & -2\sqrt{3} & -6i \\ -2\sqrt{3} & \sqrt{6} & 3\sqrt{2}i \\ 6i & -3\sqrt{2}i & 3\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

试求一酉矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角阵.

解　$|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-1)$，$\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=1$.

求出 $\lambda=0$ 的两个线性无关的特征向量为

$$\alpha_1=(1,\sqrt{2},0)$$

$$\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{6}i,-\sqrt{3}i,3)$$

求出 $\lambda=1$ 的特征向量为

$$\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-\sqrt{6}i,\sqrt{3}i,?)$$

用施密特方法正交化，再单位化后得

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\sqrt{2},0)$$

$$\beta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}i,-i,\sqrt{3})$$

$$\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-\sqrt{2}i,i,\sqrt{3})$$

令
$$T=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}i & -\sqrt{2}i\\ 2 & -i & i\\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}$$
则 $T^{-1}AT=\mathrm{diag}(0,0,1)$.

2. 酉空间的性质

例2 证明：酉空间 V 内两两正交的非零向量必线性无关.

证 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 两两正交，设
$$0=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m$$
由于$(\alpha,0)=0$，从而
$$0=(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m,\alpha_i)=k_i(\alpha_i,\alpha_i)$$
$\because$ $(\alpha_i,\alpha_i)>0$，$\therefore$ $k_i=0$. 由 i 的任意性即证.

例3 设 V 是 n 维酉空间，W 是 V 的子空间，称集 $W^{\perp}=\{\alpha\in V\,|\,(\alpha,\beta)=0$，对一切 $\beta\in W\}$ 为 W 的正交补. 证明

1) $W^{\perp}$ 为 V 的子空间；

2) 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 为 W 的一组标准正交基，将它扩大为 V 的一组标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n$ 则
$$W^{\perp}=L(\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n),$$

3) $V=W\oplus W^{\perp}$

证 1) $\because$ $(0,\beta)=0$ (一切 $\beta\in W$). $\therefore$ $0\in W^{\perp}$

$\forall$ $\alpha_1,\alpha_2\in W^{\perp}$，$k,l$ 为任意复数，则
$$(k\alpha_1+l\alpha_2,\beta)=k(\alpha_1,\beta)+l(\alpha_2,\beta)=0,\ (\text{一切 }\beta\in W)$$
所以 $k\alpha_1+l\alpha_2\in W^{\perp}$. 即证 $W^{\perp}$ 为 V 的子空间.

2) $L(\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n)\subseteq W^{\perp}$ 是显然的.

反之，$\forall$ $\alpha\in W^{\perp}$，那么
$$\alpha=k_1\varepsilon_1+\cdots+k_r\varepsilon_r+k_{r+1}\varepsilon_{r+1}+\cdots+k_n\varepsilon_n$$

$0=(\alpha,\varepsilon_i)=k_i \quad (i=1,2,\cdots,r)$

$\therefore \quad \alpha=k_{r+1}\varepsilon_{r+1}+\cdots+k_n\varepsilon_n\in L(\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n)$.

$W^{\perp}\subseteq L(\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n)$. 即证2).

3) 由2) 可知 $V=W\oplus W^{\perp}$.

例4 在酉空间中证明不等式

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

其中 $|\alpha|^2=(\alpha,\alpha)$.

证 $(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)+(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)$

$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha|\cdot|\beta|$, $|(\beta,\alpha)|\leqslant|\alpha|\cdot|\beta|$

$\therefore \quad |\alpha+\beta|^2\leqslant|\alpha|^2+|\beta|^2+2|\alpha|\cdot|\beta|=(|\alpha|+|\beta|)^2$.

即
$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|.$$

3．酉矩阵的性质

例5 酉矩阵的特征值的模为1．

证 设 λ 为酉矩阵 A 的一个特征值，其相应特征向量为 α，那么

$$A\alpha=\lambda\alpha,\quad \bar{\alpha}'\bar{A}'=\bar{\lambda}'\bar{\alpha}' \quad \bar{\alpha}'\alpha=\bar{\alpha}'\bar{A}'A\alpha=\bar{\lambda}\lambda\bar{\alpha}'\alpha$$

两边消去 $\bar{\alpha}'\alpha$，得 $|\lambda|^2=1$．故 $|\lambda|=1$．

例6 设 B,C 分别为 m 级，n 级方阵，令 $D=\begin{pmatrix}B & A\\0 & C\end{pmatrix}$

证明：D 为酉矩阵的充要条件是 $A=0$ 且 B、C 均为酉矩阵．

证 充要性显然，下证必要性．因为

$$E=\bar{D}'D=\begin{pmatrix}\bar{B}' & 0\\ \bar{A}' & \bar{C}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B & A\\ 0 & C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{B}'B & \bar{B}'A\\ \bar{A}'B & \bar{A}'A+\bar{C}'C\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \bar{B}'B=E,\ \bar{A}'B=0,\ \bar{B}'A=0 \tag{1}$$

$$\bar{A}'A+\bar{C}'C=E \tag{2}$$

由(1)式知 B 为酉矩阵．酉矩阵可逆．由(1)式可证 $A=0$．再由(2)式可证 $\bar{C}'C=E$，即 C 酉矩阵．

§3 正交变换

(一) 内容提要

1. V 是欧氏空间，σ 是 V 上线性变换，如果 σ 满足下列条件之一，即为 V 上的正交变换.

1) $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$，$\forall\alpha,\beta\in V$；

2) $|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$，$\forall\alpha\in V$；

3) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组标准正交基，那么 $\sigma(\alpha_1)$，$\cdots$，$\sigma(\alpha_n)$ 也是 V 的一组标准正交基；

4) σ 在任一组标准正交基下的矩阵是正交阵；

5) σ 在某一组标准正交基下矩阵是正交阵.

2. 正交变换分两类，设正交变换 σ 在某一组标准正交基下矩阵为 A，当 $|A|=1$ 时，称 σ 为施转或称为第一类的；当 $|A|=-1$ 时，称 σ 为第二类的正交变换.

3. 正交变换 σ 是欧氏空间的自同构映射.

4. 正交变换的积与正交变换的逆，仍为正交变换.

5. 正交变换 σ 保持夹角不变，即

$$\langle\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle,\quad\forall\alpha,\beta\in V.$$

(二) 答疑辅导

1. 欧氏空间中保持内积不变的变换是不是正交变换？(西北大学研究生入学试题)

答　是的. 由此可证它是线性变换，从而为正交变换. 下面来进行证明.

设 σ 保持内积不变，对任意 $\alpha,\beta\in V$，任意实数 k，

$$\begin{aligned}&(\sigma(k\alpha)-k\sigma\alpha,\ \sigma(k\alpha)-k\sigma\alpha)\\=&(\sigma(k\alpha),\sigma(k\alpha))+(k\sigma\alpha,k\sigma\alpha)-2(\sigma(k\alpha),k\sigma\alpha)\\=&(\sigma(k\alpha),\sigma(k\alpha))+k^2(\sigma\alpha,\sigma\alpha)-2k(\sigma(k\alpha),\sigma\alpha)\end{aligned}$$

$$=(k\alpha,k\alpha)+k^2(\alpha,\alpha)-2k(k\alpha,\alpha)=0$$

$$\therefore \qquad \sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha).$$

同理可证 $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$，从而 σ 是线性变换．再 σ 保持内积不变，故为正交变换．

2．保持任意两个非零向量夹角不变的线性变换是否为正交变换？

答　不一定是正交变换．比如 V 是欧氏空间，令 $\sigma(\alpha)=3\alpha(\forall\alpha\in V)$．则可验证

$$\langle \alpha(\alpha),\sigma(\beta)\rangle = \langle\alpha,\beta\rangle,\ \forall\alpha,\beta\in V.$$

但 σ 并不是正交变换，因为

$$|\sigma(\alpha)|=3|\alpha|,\ \forall\alpha\in V,$$

并不保持向量的长度不变．

3．设 V 为欧氏空间，定义

$$d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta| \quad \forall\alpha,\beta\in V$$

为距离，问保持距离不变的变换是不是正交变换？（山东大学研究生入学试题）

答　是正交变换．比如 σ 是 V 的变换，且

$$d(\sigma\alpha,\sigma\beta)=d(\alpha,\beta) \quad \alpha,\beta\in V.$$

从而有

$$(\sigma\alpha,\sigma\alpha)=[d(\sigma\alpha,\sigma\alpha)]^2=[d(\alpha,\alpha)]^2=(\alpha,\alpha),$$

同理有 $(\sigma\beta,\sigma\beta)=(\beta,\beta)$．由上面两式可证

$$(\sigma(\alpha),\alpha(\beta))=(\alpha,\beta) \quad \forall\alpha,\beta\in V$$

从而保持内积不变，故 σ 为正交变换．

4．V 为 n 维欧氏空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基，σ 是 V 的一个线性变换，如果满足

$$(\sigma(\alpha_i),\sigma(\alpha_j))=(\alpha_i,\alpha_j) \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

问 σ 是否为正交变换？

答　是的．我们只要证明保持内积不变就可．取 V 中任意两个向量：

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i,\quad \beta=\sum_{j=1}^{n}l_j\alpha_j$$

那么

$$\begin{aligned}(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))&=\sum k_il_j(\sigma(\alpha_i),\sigma(\alpha_j))\\&=\sum k_il_j(\alpha_i,\alpha_j)=(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

5．什么叫对称变换？它有哪些主要性质？

答　V 是 n 维欧氏空间，σ 是 V 的线性变换，如果满足

$$(\sigma\alpha,\beta)=(\alpha,\sigma\beta)\quad \forall\alpha,\beta\in V \tag{1}$$

则称 σ 为对称变换．

对称变换 σ 有两个主要性质：

1）σ 在 V 的任意一组标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下矩阵为对称阵；

2）V_1 是 σ 的不变子空间，则 $V_1^{\perp}$ 也是 σ 的不变子空间．

先证 1）．设

$$\sigma(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)A,\text{ 其中 }A=(a_{ij})$$

下证　$a_{ij}=a_{ji}$．

$$(\sigma(\varepsilon_i),\varepsilon_j)=a_{ji}$$

$$(\varepsilon_i,\sigma\varepsilon_j)=(\sigma\varepsilon_j,\varepsilon_i)=a_{ij}$$

而　$(\sigma(\varepsilon_i),\varepsilon_j)=(\varepsilon_i,\sigma\varepsilon_j)$，故 $a_{ij}=a_{ji}$．

再证 2）．$\forall\alpha\in V_1^{\perp}$，下证 $\sigma\alpha\in V_1^{\perp}$．$\forall\beta\in V_1$，则 $\sigma\beta\in V_1$，所以

$$(\sigma\alpha,\beta)=(\alpha,\sigma\beta)=0$$

由 β 的任意性．$\sigma\alpha\in V_1^{\perp}$．

6．什么叫反对称变换？

答　V 为 n 维欧氏空间，σ 是 V 的线性变换，如果满足

$$(\sigma\alpha,\beta)=-(\alpha,\sigma\beta)\quad \forall\alpha,\beta\in V$$

则称 σ 是反对称变换.

它与对称变换类似有两个主要性质：

1）反对称变换在任一组标准正交基下矩阵为反对称阵.

2）V_1 是反对称变换 σ 的不变子空间，则 $V_1^{\perp}$ 也是σ的不变子空间.

证明方法同对称变换类似.

7．什么叫酉变换？

答　V 是酉空间，σ 是 V 的线性变换，如果满足

$$(\sigma\alpha,\sigma\beta)=(\alpha,\beta)\quad \forall\alpha,\beta\in V \tag{1}$$

则称 σ 为酉变换.

8．酉变换有哪些主要性质？

答　它具有与正交变换类似的性质．设 V 是 n 维酉空间，σ 是 V 的线性变换．我们可证下面四句话等价：

1）σ 是酉变换；

2）$|\sigma\alpha|=|\alpha|\quad \forall\alpha\in V$ (2)

3）σ 在某一组标准正交基下矩阵为酉矩阵；

4）σ 把任一组标准正交基变为标准正交基.

先证1)$\Longrightarrow$2)．

$$|\sigma\alpha|^2=(\sigma\alpha,\sigma\alpha)=(\alpha,\alpha)=|\alpha|^2 \tag{3}$$

$\therefore$ $$|\sigma\alpha|=|\alpha|.$$

再证2)$\Longrightarrow$3)．设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基.

$$\sigma(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)A \tag{4}$$

下证 A 为酉矩阵.

$$(\sigma(\varepsilon_k+\varepsilon_j),\sigma(\varepsilon_k+\varepsilon_j))$$
$$=(\sigma(\varepsilon_k),\sigma(\varepsilon_k))+(\sigma\varepsilon_j,\sigma\varepsilon_j)$$
$$+(\sigma(\varepsilon_k),\sigma(\varepsilon_j))+(\sigma(\varepsilon_j),\sigma(\varepsilon_k)) \tag{5}$$
$$(\varepsilon_k+\varepsilon_j,\varepsilon_k+\varepsilon_j)=(\varepsilon_k,\varepsilon_k)+(\varepsilon_j,\varepsilon_j)$$
$$+(\varepsilon_k,\varepsilon_j)+(\varepsilon_j,\varepsilon_k) \tag{6}$$

由(3)，(5)，(6)三个式子得证

$$(\sigma\varepsilon_k,\sigma\varepsilon_j)+(\sigma\varepsilon_j,\sigma\varepsilon_k)=(\varepsilon_k,\varepsilon_j)+(\varepsilon_j,\varepsilon_k) \tag{7}$$

再用 $i\varepsilon_k$ 换 ε_k，可得

$$(\sigma(i\varepsilon_k),\sigma\varepsilon_j)+(\sigma\varepsilon_j,\sigma(i\varepsilon_k))=(i\varepsilon_k,\varepsilon_j)+(\varepsilon_j,i\varepsilon_k)$$
$$\therefore\quad i(\sigma\varepsilon_k,\sigma\varepsilon_j)-i(\sigma\varepsilon_j,\sigma\varepsilon_k)=i(\varepsilon_k,\varepsilon_j)-i(\varepsilon_j,\varepsilon_k) \tag{8}$$

$i\times(7)+(8)$，化简可得

$$(\sigma\varepsilon_k,\sigma\varepsilon_j)=(\varepsilon_k,\varepsilon_j). \tag{9}$$

再证 A 为酉矩阵.

$$a_{1k}\bar{a}_{1j}+\cdots+a_{nk}\bar{a}_{nj}=(\sigma\varepsilon_k,\sigma\varepsilon_j)=(\varepsilon_k,\varepsilon_j)=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$$

即 $\bar{A}'A=E$，从而 A 为酉矩阵.

再证3)⟹4). 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基，σ 在 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下矩阵为酉矩阵 A. 下证 $\sigma\varepsilon_1,\cdots\sigma\varepsilon_n$ 也是标准正交基.

首先由(4)式及 A 可逆，可知 $\sigma\varepsilon_1,\cdots,\sigma\varepsilon_n$ 为 V 的一组基.

$$(\sigma\varepsilon_i,\sigma\varepsilon_j)=(a_{1i}\varepsilon_1+\cdots+a_{ni}\varepsilon_n,a_{1j}\varepsilon_1+\cdots+a_{nj}\varepsilon_n)$$
$$=a_{1i}\bar{a}_{1j}+\cdots+a_{ni}\bar{a}_{nj}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

即证 $\sigma\varepsilon_1,\cdots,\sigma\varepsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基.

最后证明4)⟹1). 在 V 取一组标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$. 设

$$\sigma(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)A \qquad (10)$$

由4）假设可知$\sigma\varepsilon_1,\cdots,\sigma\varepsilon_n$为标准正交基．由上节证明知$A$为酉矩阵．现在$V$中任取两个向量

$$\alpha=\sum k_i\varepsilon_i,\ \ \beta=\sum l_i\varepsilon_i$$

那么

$$(\sigma\alpha,\sigma\beta)=(\Sigma k_i\sigma\varepsilon_i,\Sigma l_i\sigma\varepsilon_i)$$
$$=k_1\bar{l}_1+\cdots+k_n\bar{l}_n,$$
$$(\alpha,\beta)=(\Sigma k_i\varepsilon_i,\Sigma l_j\varepsilon_j)=k_1\bar{l}_1+\cdots+k_n\bar{l}_n,$$
$$(\sigma\alpha,\sigma\beta)=(\alpha,\beta).$$

由α,β的任意性，故σ为酉变换．

（三）题型归类

1．验证正交变换

例1　(哈尔滨师大研究生入学试题)设η是n维欧氏空间V的一个单位向量．定义

$$\sigma\alpha=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta \qquad (1)$$

证明：σ是第二类(行列式等于-1)的正交变换．

证　先证σ是V的线性变换．$\forall\alpha,\beta\in V$，$k,l\in R$(实数域)，由(1)式

$$\sigma(k\alpha+l\beta)=(k\alpha+l\beta)-2(\eta,k\alpha+l\beta)\eta$$
$$=k\sigma\alpha+l\sigma\beta.$$

所以σ是V的线性变换．

再证保持内积不变，由$(\eta,\eta)=1$，则

$$(\sigma\alpha,\sigma\beta)=(\alpha-2(\eta,\alpha)\eta,\beta-2(\eta,\beta)\eta)$$
$$=(\alpha,\beta)-2(\eta,\beta)(\eta,\alpha)-2(\eta,\alpha)(\eta,\beta)$$
$$+4(\eta,\alpha)(\eta,\beta)$$
$$=(\alpha,\beta).$$

即证σ为正交变换．

最后证明 σ 是第二类的．由 η 是单位向量，将它扩大为 V 的一组标准正交基为 $\eta,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$．则由(1)式可证

$$\sigma\eta=-\eta$$

$$\sigma\varepsilon_i=\varepsilon_i\ (i=2,\cdots,n)$$

故 σ 在基 $\eta,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下矩阵为 $\mathrm{diag}(-1,1,\cdots,1)$，其行列式值等于 -1，故 σ 为第二类正交变换．

例2 在 $n(n>2)$ 维欧氏空间 V 中，S 是一些向量所成之集，其中有 $n-1$ 个线性无关的向量．又设 $\alpha\neq0$，且 α 与 S 中每一向量正交．若 V 上线性变换 σ 满足

$$\sigma\beta=\beta\quad\forall\beta\in S$$

$$\sigma\alpha=-\alpha$$

证明：σ 是第二类正交变换．

证 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 为 S 中 $n-1$ 个线性无关的向量，令 $W=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$，在 W 中取得一组标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_{n-1}$．再令 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{|\alpha|}\alpha$．则 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基由假设可证：

$$\sigma\varepsilon_i=\varepsilon_i\ (i=1,2\cdots n-1),\ \sigma\varepsilon_n=\sigma\left(\frac{1}{|\alpha|}\alpha\right)=-\varepsilon_n.$$

因此 σ 将标准正交基变为标准正交基．从而 σ 为正交变换．

σ 在标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下矩阵为 $\mathrm{diag}(1,\cdots1,-1)$，行列式值等于 -1，因此是第二类的．

2．作正交变换

例3 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 是 n 维欧氏空间 V 的两个向量组．证明存在一正交变换 σ，使

$$\sigma\alpha_i=\beta_i\ (i=1,2,\cdots,m)\qquad(1)$$

的充分必要条件为

$$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j)\ (i,j=1,2,\cdots,m)\qquad(2)$$

证 先证必要性.

$(\beta_i,\beta_j)=(\sigma\alpha_i,\sigma\alpha_j)=(\alpha_i,\alpha_j)\ (i,j=1,2,\cdots,m)$.

再设充分性. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的一个极大线性无关组，再将 $\alpha_1,\cdots\alpha_r$ 用施密特方法正交化，即存在满秩上三角阵 T，使得

$$(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_r)=(\alpha_1\cdots\alpha_r)T. \tag{3}$$

其中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 为标准正交向量组.

由(2)式，以及 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关. 可证 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 也是 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的一个极大线性无关组. 令

$$(\eta_1\cdots\eta_r)=(\beta_1\cdots\beta_r)T \tag{4}$$

由(2),(3)两式可证

$$(\eta_i,\eta_j)=(\varepsilon_i,\varepsilon_j) \tag{5}$$

从而 $\eta_1,\cdots,\eta_r$ 也是一个标准正交向量组.

分别将 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_r$ 扩大为 V 的两组标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_r,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$. 定义

$$\sigma\varepsilon_i=\eta_i\ (i=1,2,\cdots,n)$$

则 σ 是线性变换，且将标准正交基变为标准正交基，因此 σ 是正交变换.

最后证明 σ 满足(1)式.

$$\begin{aligned}(\beta_1\cdots\beta_r)T&=(\eta_1\cdots\eta_r)=(\sigma\varepsilon_1,\cdots,\sigma\varepsilon_r)\\&=\sigma(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_r)=\sigma((\alpha_1\cdots\alpha_r)T)\\&=(\sigma\alpha_1\cdots\sigma\alpha_r)T\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sigma\alpha_i=\beta_i\ (i=1,2,\cdots,r).$$

对于 $\forall\alpha_j(j=r+1,\cdots,m)$，有

$$\alpha_j=l_1\alpha_1+\cdots+l_r\alpha_r$$

$$\sigma\alpha_j=l_1\sigma\alpha_1+\cdots+l_r\sigma\alpha_r=l_1\beta_1+\cdots+l_r\beta_r.$$

由 σ 为正交变换，保持内积不变，以及(2)式，则

$$(\sigma\alpha_j-\beta_j,\sigma\alpha_j-\beta_j)=(\sigma\alpha_j,\sigma\alpha_j)+(\beta_j,\beta_j)$$
$$-2(\sigma\alpha_j,\beta_j)$$
$$=2(\alpha_j,\alpha_j)-2(l_1\beta_1+\cdots+l_r\beta_r,\beta_j)$$
$$=2(\alpha_j,\alpha_j)-2(\alpha_j,\alpha_j)=0$$

$\therefore \qquad \sigma\alpha_j=\beta_j \ (i=r+1,\cdots,m).$

例4 设 α,β 为 n 维欧氏空间 V 的两个单位向量，证明存在第二类正变换 σ，使 $\sigma\alpha=\beta$.

证 分别将 α 和 β 扩大为 V 的两组标准正交基

$$\alpha,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n \text{ 和 } \beta,\eta_2,\cdots,\eta_n$$

设过渡矩阵为 T，即

$$(\alpha,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\beta,\eta_2,\cdots,\eta_n)T$$

1) 当 $|T|=-1$ 时，由上题知存在正交变换 σ 使

$$\sigma\alpha=\beta,\sigma\varepsilon_i=\eta_i \ (i=2,\cdots,n)$$

则

$$\sigma(\alpha,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\beta,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\alpha,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)T^{-1}$$

$|T^{-1}|=-1$. 从而 σ 为第二类的.

2) 当 $|T|=1$. 仍由上题存在正交变换 σ，使 $\sigma\alpha=\beta$，$\sigma\varepsilon_i=\eta_i(i=2,\cdots,n-1)$，$\sigma\varepsilon_n=-\eta_n$. 则

$$\sigma(\alpha,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_n)=(\beta,\eta_2,\cdots,\eta_{n-1},-\eta_n)$$
$$=(\alpha,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_n)T_1$$

则过渡矩阵 $|T_1|=-1$. σ 仍为第二类的.

§4 综 合 题

例1(湖南大学研究生入学试题) 设 T 是酉空间 V 的一个线性变换，于是下面四个命是互相等价的：

1) T 是酉变换；

2) T 是同构映射；

3）如果$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$是标准正交基，那么$T\varepsilon_1$，…，$T\varepsilon_n$也是标准正交基；

4）T在任一组标准正交基下的矩阵是酉矩阵.

证 1)$\Longrightarrow$2) T是酉变换，由p.245本章§3答疑辅导8知，取V的标准正交基后，在这组基下矩阵为酉矩阵A，$|A|\neq 0$.从而T是可逆变换，即T是双射.

另外，T是线性变换，所以

$$T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)\quad \forall\alpha,\beta\in V.$$

$$T(k\alpha)=kT(\alpha)\quad \forall k\in k,\alpha\in V$$

再由T是酉变换，有

$$(T\alpha,T\beta)=(\alpha,\beta)\quad \forall\alpha,\beta\in V.$$

即证T是同构映射.

2)$\Longrightarrow$1) 显然.

1)与3)等价见p.354本章§3答疑辅导8.

1)$\Longrightarrow$4) 任取V的一组标准正交基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，$T$是酉变换则由3)知，$T\varepsilon_1,\cdots T\varepsilon_n$也是标准正交基，则

$$T(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)A$$

由p.345本章§2答疑辅导4知A为酉矩阵.

4)$\Longrightarrow$1) 取V的一组标准正交基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，设

$$T(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)B$$

由4)假设知B为酉矩阵，仍由本章§2答疑辅导4，则$T\alpha_1\cdots,T\alpha_n$为标准正交基.则由3)知$T$为酉变换.

例2 设$K[x]_n$为复数域K上次数不超过n的多项式全体，再加上零多项式.$\forall f(x),g(x)\in K[x]_n$规定二元函数如下：

$$(f,g)=\sum_{j=1}^{n}f(j)\overline{g(j)}\qquad(1)$$

证明(1)式定义的(f,g)是内积，从而$K[x]_n$构成酉空间.

证 $\forall f(x),g(x),h(x)\in K[x]_n$, $l\in K$，则

$$(f,g)=\sum_{j=1}^{n}f(j)\overline{g(j)},\quad (g,f)=\sum_{j=1}^{r}g(j)\overline{f(j)}$$

$$(f,g)=\overline{(g,f)}.$$

$$(f+g,h)=\sum_{j=1}^{n}[f(j)+g(j)]\overline{h(j)}=(f,h)+(g,h).$$

$$(lf,g)=\sum_{j=1}^{n}lf(j)\overline{g(i)}=l(f,g).$$

$$(f,f)=\sum_{j=1}^{n}f(j)\overline{f(j)}\geqslant 0.$$

$$(f,f)=0\Longleftrightarrow f(j)\overline{f(j)}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$$
$$\Longleftrightarrow f(j)=0\ (j=1,2,\cdots,n)\Longleftrightarrow f(x)=0$$

所以 (f,g) 是内积．$K[x_n]$ 关于此内积构成酉空间．

例3 设 T,S 为欧氏空间 V 的两个线性变换，且对于 V 中任意向量 α，均有

$$(T\alpha,T\alpha)=(S\alpha,S\alpha)$$

证明：值域 $V_1=TV$ 与 $V_2=SV$ 同构．

证 令

$$\varphi:\ T\alpha\to S\alpha,\ \forall\alpha\in V$$

即 $\varphi(T\alpha)=S\alpha$．下面证明 φ 是 V_1 与 V_2 的同构映射．

若 $T\alpha=T\beta$，则 $T(\alpha-\beta)=0$，从而

$$(S(\alpha-\beta),S(\alpha-\beta))=(T(\alpha-\beta),T(\alpha-\beta))$$
$$=(0,0)=0$$

故 $$T(\alpha-\beta)=0,\ S\alpha=S\beta.$$

即 φ 为 V_1 到 V_2 的映射．而且显然 φ 是满射．

其次，若 $T\alpha\neq T\beta$，则必然 $S\alpha\neq S\beta$，因若 $S\alpha=S\beta$，则由上知，又有 $T\alpha=T\beta$．故 φ 为 V_1 到 V_2 上的单射．从

而 φ 为双射。

$$\varphi(T\alpha+T\beta)=\varphi(T(\alpha+\beta))=S(\alpha+\beta)=S\alpha+S\beta$$
$$=\varphi(T\alpha)+\varphi(T\beta).$$
$$\varphi(k(T\alpha))=\varphi(T(k\alpha))=S(k\alpha)=k(S\alpha)=k\varphi(T\alpha).$$

且设 $T\alpha, T\beta\in V_1$，则

$$(T(\alpha+\beta), T(\alpha+\beta))$$
$$=(T\alpha, T\alpha)+2(T\alpha, T\beta)+(T\beta, T\beta)$$
$$(S(\alpha+\beta), S(\alpha+\beta))$$
$$=(S\alpha, S\alpha)+2(S\alpha, S\beta)+(S\beta, S\beta)$$

比较两式得

$$(T\alpha, T\beta)=(S\alpha, S\beta).$$

故 φ 为 V_1 与 V_2 的同构映射，从而 V_1 与 V_2 同构.

例4 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是欧氏空间 V 的一组标准正交基，试求正交变换 T，使

$$T\alpha_1=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_3,$$
$$T\alpha_2=\frac{2}{3}\alpha_1-\frac{1}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3.$$

解 设 $T\alpha_3=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，若 T 为正交变换，

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$$

则

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3x_1 \\ 2 & -1 & 3x_2 \\ -1 & 2 & 3x_3 \end{pmatrix}$$

就是正交阵，则由列正交有

$$\begin{cases} 6x_1+6x_2-3x_3=0 & (1) \\ 6x_1-3x_2+6x_3=0 & (2) \end{cases}$$

(1) - (2)，可得 $x_2=x_3$，再由最后两行正交得

$$9x_2x_3=4, \qquad 9x_2^2=4, \qquad x_2=\pm\frac{2}{3}$$

当 $x_2=x_3=-\frac{2}{3}$. 代入(1)解得 $x_1=\frac{1}{3}$. 当 $x_2=x_3=\frac{2}{3}$时,

可得 $x_1=-\frac{1}{3}$

即 $T\alpha_3=\frac{1}{3}\alpha_1-\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{2}{3}\alpha_3$ 或 $T\alpha_3=-\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2+\frac{2}{3}\alpha_3$ 均可.

例5 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的对称变换, 若 $\sigma^2=I_V$, 则 σ 是正交变换.

证 取 V 的一组标准正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 设 σ 在这组基下矩阵为 A, 由于 σ 是对称变换, 由上节知 A 为实对称阵,

由 $\sigma^2=I_V$ 可得 $A^2=E$, $A=A^{-1}$.

$$\therefore \qquad A'=A=A^{-1}$$

即 A 为正交阵, 从而 σ 为正交变换.

例6 (湖北大学研究生入学试题) 设 σ 为 n 维欧氏空间 V 的一个反对称线性变换, 证明

1) $\sigma\pm I_V$ 为满秩的;

2) $\tau=(\sigma-I_V)(\sigma+I_V)^{-1}$ 为正交变换.

证 1) 取 V 的一组标准正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 设 σ 在这组基下矩阵为 A. 由上节知 A 为实反对称阵. 由 p.260 例2 知

$$|A+E|=|E-A|\neq 0$$

故 $\sigma\pm I_V$ 是满秩的.

2) 令 $B=(A-E)(A+E)^{-1}$, 仍由 p.260 例2 知 B 为正交阵, 它对应的线性变换 $(\sigma-I_V)(\sigma+I_V)^{-1}$ 就是正交变换.

例7 (第三届全国大学生数学夏令营试题) 给定 $n\times m$

实矩阵 A 和 n 维实向量 a. 记 R^n 中原点到点集 $\{Ax-a|x\in R^m\}$ 之最短距离为 d. 试证：$d=|Ax_0-a|$，其中 x_0 为方程 $A'Ax=A'a$ 的解.

证 在 R^n 中定义内积为

$$(\alpha,\beta)=\alpha'\beta \qquad \forall\alpha,\beta\in R^n \tag{1}$$

则 R^n 构成欧氏空间，且

$$|\alpha|^2=\alpha'\alpha. \tag{2}$$

由(2)式，对任意 $x\in R^m$

$$\begin{aligned}|Ax-a|^2&=|(Ax_0-a)+A(x-x_0)|^2\\&=[(Ax_0-a)+A(x-x_0)]'[(Ax_0-a)+\\&\quad A(x-x_0)]\\&=|Ax_0-a|^2+|A(x-x_0)|^2+2(x-\\&\quad x_0)'(A'Ax_0-A'a)\\&=|Ax_0-a|^2+|A(x-x_0)|^2\\&\geqslant|Ax_0-a|^2\end{aligned}$$

由 x 的任意性，所以

$$d\geqslant|Ax_0-a|. \tag{3}$$

另一方面 $x_0\in R^m$，因此，又有

$$|Ax_0-a|\geqslant d. \tag{4}$$

由(3),(4)两式，即证 $d=|Ax_0-a|$.

例8 证明 1）矩阵之积为酉矩阵；

2）酉矩阵之逆为酉矩阵.

证 1）设 A,B 为酉矩阵，因为

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\bar{B}'\bar{A}'=\overline{AB}'.$$

所以 AB 为酉矩阵.

2）设 A 为酉矩阵，$\bar{A}'=A^{-1}$

$$\bar{A}'A=A\bar{A}'=E \tag{1}$$

由(1)式可以看出 $\bar{A}'$ 是酉矩阵，即 A^{-1} 为酉矩阵.

例9 （日本早稻田大学研究生入学试题） 设 $A=(a_{ij})$ 为复 $n\times n$ 矩阵.

1）证明：$H=\bar{A}'A$ 是厄米特矩阵；

2）证明：H 的特征值全非负；

3）设 $\bar{A}'A=A\bar{A}'$，这时若选适当酉矩阵 U，则易知 $U^{-1}AU=\wedge$（$\wedge$为对角阵）. 现使用这一结论证明：设 A 的所有特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 则等式

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2=\sum_{j,k}|a_{jk}|^2$$

成立.

证 1） $\bar{H}'=(\overline{\bar{A}'A})'=\bar{A}'A=H$，故 H 是厄米特阵.

2）设 x 是 n 维列向量，则

$$x'Hx=(\overline{Ax})'Ax=|Ax|^2\geqslant 0$$

其中 $|Ax|$ 为长度.

设 λ 为 H 的特征值，相应特征向量为 β，

$$H\beta=\lambda\beta,\ \therefore\ 0\leqslant\bar{\beta}'H\beta=\lambda\bar{\beta}'\beta=\lambda|\beta|^2$$

则 $\lambda\geqslant 0$.

3）设 $U^{-1}AU=\wedge$，其中 $\wedge=\text{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

$$U^{-1}HU=U^{-1}\bar{A}'UU^{-1}AU=\bar{\wedge}'\wedge$$

$$=\text{diag}(|\lambda_1|^2,\cdots,|\lambda_n|^2)$$

$$\therefore\ \sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2=\text{tr}\,U^{-1}HU=\text{tr}\,H=\text{tr}\bar{A}'A$$

$$=\sum_{j,k}|a_{jk}|^2.$$

例10 （日本大阪府立大学研究生入学试题） **有两个厄米特矩阵 A 与 B，使 $AB=BA$ 成立的必要充分条件是存在一个酉矩阵 U，使 $\wedge_1=U^{-1}AU$，$\wedge_2=U^{-1}BU$ 为对角阵.**

证 仿p.111第三章§6综合题例8可证.

第十一章 广义逆矩阵与M矩阵

§1 哈达玛积与克涅朗克积

（一）内容提要

1. $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 均为 $s\times n$矩阵，$C=(c_{ij})$ 也是 $s\times n$ 矩阵，称为 A 与 B 的哈达玛积，其中

$$c_{ij}=a_{ij}b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,n)$$

记为 $C=A*B$.

2. $A=(a_{ij})$和 $B=(b_{ij})$ 分别为 $s\times n$ 和 $t\times m$ 矩阵，称矩阵

$$C=\begin{pmatrix}a_{11}B & \cdots & a_{1n}B\\ \vdots & & \vdots\\ a_{s1}B & \cdots & a_{sn}B\end{pmatrix}$$

为 A 与 B 的克朗涅克积，记为 $C=A\otimes B$.

显然 $A\otimes B$ 为 $st\times nm$ 矩阵.

（二）答疑辅导

1. 哈氏积有哪些主要性质？

答 主要性质如下：

1) $A*0=0*A=0$.

2) $A*B=B*A$.

3) $(A*B)*C=A*(B*C)$.

4) i) $A*(B+C)=A*B+A*C$.

ii) $(B+C)*A=B*A+C*A$.

5) $A*e\cdot e'=A$ 其中 $e'=(1,1,\cdots,1)$.

6）$A*E=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots a_{nn})$.

其中 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，E 为 n 阶单位阵.

这里我们只证4）的 i）及5）6），其余依定义易得证.

记 $s\times n$ 阵为 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，$C=(a_{ij})$ 于是

$$A*(B+C)=(a_{ij}(b_{ij}+c_{ij}))$$

$$=(a_{ij}\cdot b_{ij}+a_{ij}\cdot c_{ij})=(a_{ij}\cdot b_{ij})+(a_{ij}\cdot c_{ij})$$

$$=A*B+A*C.$$ 故4）的 i）得证.

下证5），因为

$$ee'=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}(1,1,\cdots,1)=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix},$$

于是有

$$A*ee'=(a_{ij}\times 1)=(a_{ij})=A,$$

对于(6)

$$A*E=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&&\\&\ddots&\\&&a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots a_{nn}).$$

2. $A\otimes B$ 与 $B\otimes A$ 是否相等？

答　一般是不相等的. 比如

$$A=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}c_1&c_2\\c_3&c_4\end{pmatrix}$$

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}aB\\bB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac_1&ac_2\\ac_3&ac_4\\bc_1&bc_2\\bc_3&bc_4\end{pmatrix}$$

$$B\otimes A=\begin{pmatrix}c_1A & c_2A\\ c_3A & c_4A\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}c_1a & c_2a\\ c_1b & c_2b\\ c_3a & c_4a\\ c_3b & c_4b\end{pmatrix}$$

只要 $a\neq b$，$c_1\neq c_3$ 时，$A\otimes B\neq B\otimes A$.

3. 克朗涅克积有哪些主要性质？

答. 主要性质如下：

1) $A\otimes 0=0\otimes A=0$

2) $E_n\otimes E_m=E_{nm}$

其中 E_n 表示 n 阶单位阵.

3) $k(A\otimes B)=(kA)\otimes B=A\otimes(kB)$

4) $(A\otimes B)\otimes C=A\otimes(B\otimes C)$

5) i) $A\otimes(B_1+B_2)=A\otimes B_1+A\otimes B_2$.

ii) $(A_1+A_2)\otimes B=A_1\otimes B+A_2\otimes B$.

6) $(A\otimes B)'=A'\otimes B'$

7) $(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD)$

8) $(E_n\otimes A)(B\otimes E_m)=(B\otimes E_m)(E_n\otimes A)$

其中 A 是 m 阶方阵，B 是 n 阶方阵.

9) $(E_s\otimes X)A=A\otimes X$

10) $A(E_m\otimes X')=A\otimes X'$ （X 是列向量）

11) 设 n 阶方阵 A 及 m 阶方阵 B 则

$$|A\otimes B|=|A|^m\cdot|B|^n.$$

12) 设 $s\times n$ 阵 A 及 $t\times m$ 阵 B，则

$$\mathrm{rk}(A\otimes B)=\mathrm{rk}(A)\cdot\mathrm{rk}(B)$$

在上述运算中对矩阵的加法及乘法应满足可加性及可乘

性．我们只给出部分性质的证明，有的用定义是很容易证明的．

对于4）由

$$(A\otimes B)\otimes C=\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}B & \cdots & a_{sn}B \end{pmatrix}\otimes C$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}(B\otimes C) & \cdots & a_{1n}(B\otimes C) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}(B\otimes C) & \cdots & a_{sn}(B\otimes C) \end{pmatrix}=A\otimes(B\otimes C)$$

所以4）成立．

对于7）需设 $s\times n$ 阵 A，$n\times p$ 阵 C，$t\times m$ 阵 B 及 $m\times q$ 阵 D．由定义得

$$(A\otimes B)\cdot(C\otimes D)=\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}B & \cdots & a_{sn}B \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1p}D \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1}D & \cdots & c_{np}D \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} f_{11}BD & \cdots & f_{1p}BD \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{s1}BD & \cdots & f_{sp}BD \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{s1} & \cdots & f_{sp} \end{pmatrix}\otimes(BD)$$

这里 $f_{ij}=a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j}+\cdots+a_{in}c_{nj}\quad\begin{pmatrix} i=1,2,\cdots,s \\ j=1,2,\cdots,p \end{pmatrix}$

由此 $(f_{ij})=AC$，从而得

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD).$$

再证12）设 $\mathrm{rk}A=r,\mathrm{rk}B=b$，于是有下列 s 阶可逆矩阵 P，n 阶可逆阵 Q，t阶可逆阵 R，n 阶可逆阵 T，使得

$$A=P\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}Q,\quad B=R\begin{pmatrix} E_b & \\ & 0 \end{pmatrix}T.$$

从而得

$$A\otimes B=(P\otimes R)\left[\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}E_b & \\ & 0\end{pmatrix}\right](Q\otimes T).$$

$$\therefore\quad \mathrm{rk}(A\otimes B)=\mathrm{rk}\left[\begin{pmatrix}E_r & \\ & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}E_b & \\ & 0\end{pmatrix}\right]$$

$$=r\cdot b=\mathrm{rk}(A)\cdot \mathrm{rk}(B)$$

由3)、5)、7)还可以得到下列命题

13) $(kA)\otimes(lB)=(kl)(A\otimes B)$

14) $(A_1+A_2)\otimes(B_1+B_2)=A_1\otimes B_1+A_1\otimes B_2+A_2\otimes B_1$
$+A_2\otimes B_2.$

15) A,B 可逆时

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}.$$

13),14)容易得到．至于15)只需验证

$$(A\otimes B)(A^{-1}\otimes B^{-1})=E_{nm},$$

即可，事实上

$$(A\otimes B)(A^{-1}\otimes B^{-1})=(AA^{-1})\otimes(BB^{-1})=E_n\otimes E_m$$
$$=E_{nm}.$$

（三）题型归类

1．计算

例 1 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，

1) 求 $A*B$ 和 $A\otimes B$；

2) $A*B$ 和 $A\otimes B$ 是否可逆，若可逆，求出其逆．

解 1) $A*B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}.$ (1)

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 2 & 4\\ 4 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

2）$A*B$不可逆（由(1)知）．但

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2．证明

例 2 设 A、B、C 均为幂等阵，证明 $A\otimes B\otimes C$ 也是幂等阵．

证 设 $A^2=A$ 为 n 阶方阵，$B^2=B$ 是 m 阶方阵，$C^2=C$ 为 s 阶方阵．则

$$(A\otimes B\otimes C)^2=(A\otimes B)^2\otimes C^2=A^2\otimes B^2\otimes C^2=A\otimes B\otimes C.$$

例 3（北京航空学院研究生入学试题） 设n 级正定阵 $A=(a_{ij})$和 $B=(b_{ij})$，令 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{ij}b_{ij} \quad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

那么C 也是正定阵．

证 实际上$C=A*B$．首先 C 是实对称阵．由于 B 是正定阵，从而存在正定阵 $T=(t_{ij})$，使得 $B=T'T$．则

$$b_{ij}=t_{1i}t_{1j}+t_{2i}t_{2j}+\cdots+t_{ni}t_{nj} \tag{2}$$

$$X'CX=\sum c_{ij}x_ix_j=\sum a_{ij}b_{ij}x_ix_j$$

$$=\sum_{i,j}a_{ij}\left[\sum_{k=1}^{n}(t_{ki}x_i)(t_{kj}x_j)\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i,j}a_{ij}(t_{ki}x_i)(t_{kj}x_j)\right]$$

$$\therefore \qquad X'CX=\sum_{k=1}^{n} y'_k A y_k \tag{3}$$

其中 $$y'_k=(t_{k1}x_1, \cdots, t_{kn}x_n) \tag{4}$$

因为 A 正定，由(3)知 C 半正定.

今设 $X'=(x_1, \cdots, x_n)\neq 0$. 若能证得某一个 $y_k\neq 0$ 则由(3)式可证 C 正定. 用反证法，若

$$y_k=0 \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{5}$$

则

$$0=(y_1,\cdots,y_n)=\begin{pmatrix} t_{11}x_1 & t_{21}x_1 & \cdots & t_{n1}x_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{1n}x_n & t_{2n}x_n & \cdots & t_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$=(\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n))T'$$

由于 T 可逆，所以

$$\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n)=0, \qquad x_1=\cdots=x_n=0,$$

这与 $X\neq 0$ 矛盾.

§2 广义逆矩阵

(一) 内容提要

1. A 是 $m\times n$ 复矩阵，如果存在 $n\times m$ 复矩阵 G，使得

1) $AGA=A,$ (1)

2) $GAG=G,$ (2)

3) $(\overline{AG})'=AG,$ (3)

4) $(\overline{GA})'=GA,$ (4)

则称 G 为 A 的一个 Moore—Penrose 广义逆，简称为加号逆，记为 A^+.

2. 如果上面 G 只满足方程(1)，称 G 为减号逆，记为 A^-.

（二）答疑辅导

1．加号逆是否存在？

答　A^+ 是存在的．

事实上，设 A 是 $m\times n$ 矩阵．若 $A=0$，易证 $A^+=0$，它是 $n\times m$ 阵．

下设 $A\neq 0$，且 $\mathrm{rk}(A)=r>0$．设 A 的满秩分解为 $A=PQ$，其中 P 为 $m\times r$ 阵，Q 为 $r\times n$ 阵，且

$$\mathrm{rk}(P)=\mathrm{rk}Q=r.$$

令

$$G=\bar{Q}'(Q\bar{Q}')^{-1}(\bar{P}'P)^{-1}\bar{P}' \tag{5}$$

由于 $r=\mathrm{rk}(Q\bar{Q}')=\mathrm{rk}(\bar{P}'P)$．因此(5)式是有意义的．下证 $G=A^+$．

1） $AGA=PQ[\bar{Q}(Q\bar{Q}')^{-1}(\bar{P}'P)^{-1}\bar{P}']PQ$

$=PQ=A,$

2）类似可证 $GAG=G$．

3） $AG=PQ[\bar{Q}(Q\bar{Q}')^{-1}(\bar{P}'P)^{-1}\bar{P}']=P(\bar{P}'P)^{-1}\bar{P}'$

$\therefore\quad (\overline{AG})'=P(\bar{P}'P)^{-1}\bar{P}'=AG.$

4）类似可证　$(\overline{GA})'=GA$．

由此可知(5)是 A^+ 的求法公式．

2．A^+ 是否唯一？

答　唯一．设 G,H 均满足 $M-P$ 条件，下证 $G=H$．

$$\begin{aligned}G&=GAG=(\overline{GA})'G=\bar{A}'\bar{G}'G=(\overline{AHA})'\bar{G}'G\\&=\overline{HA}'\bar{A}'\bar{G}'G=HAGAG=HAG=(HAH)AG\\&=H(\overline{AH})'AG=H\bar{H}'\bar{A}'AG\\&=H\bar{H}'\bar{A}'\bar{G}'\bar{A}'\\&=H\bar{H}'\bar{A}'=HAH=H.\end{aligned}$$

3．怎样求 A^+？

答　分几种情况

1) 设 A 是 $n\times n$ 可逆阵，则 $A^{+}=A^{-1}$.

事实上，由于 A^{-1} 满足 $M—P$ 条件，又加号逆唯一．即证 $A^{+}=A^{-1}$.

2) A 不是方阵，甚至不可逆时，我们通过一个例子介绍 A^{+} 的求法．

设
$$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&1\end{pmatrix}.$$

因为秩$(A)=2$，存在可逆阵 P,Q 使

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_2\\0\end{pmatrix}.$$

利用初等变换

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}1&1&1&0&0\\2&0&0&1&0\\-1&0&0&0&1\\\hline 1&0&&&\\0&1&&&\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{cc|ccc}1&0&1&0&0\\0&1&-2&1&0\\0&0&-1&1&1\\\hline 1&\frac{1}{2}&&&\\0&-\frac{1}{2}&&&\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c|c}A&P\\\cdots&\cdots\\Q&\end{array}\right)$$

其中

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&1&1\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-2\end{pmatrix}=BC. \quad (6)$$

则(6)为 A 的满秩分解，从而由(5)式

$$A^+=\overline{C}'(C\overline{C}')^{-1}(\overline{B}'B)^{-1}\overline{B}'=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&0&3\end{pmatrix}.$$

3) 若 A 是 实对称阵求法可给出公式．由于存在正交阵 T 使

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix} \quad (7)$$

则

$$A^+=T\begin{pmatrix}\lambda_1^+&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^+\end{pmatrix}T' \quad (8)$$

其中

$$\lambda_i^+=\begin{cases}0 & \text{当 } \lambda_i=0 \text{ 时}\\ \dfrac{1}{\lambda_i} & \text{当 } \lambda_i\neq 0 \text{ 时}.\end{cases}$$

事实上不失一般设

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&\\&\ddots&&&\\&&\lambda_1&&\\&&&0&\\&&&&\ddots\\&&&&&0\end{pmatrix} \quad \text{其中} r=rk(A),\lambda_1\cdots\lambda_r\neq 0 \quad (19)$$

那么令 $G=T\text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\ \cdots,\ \frac{1}{\lambda_r},0\cdots 0\right)T'$，下证 G 满足 M-P 条件．我们只验证第3条，其余类似可证．

$$AG=T\text{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0\cdots 0)T'T\text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_r}0,\cdots 0\right)T'$$

$$=T\text{diag}(1,\cdots,1,0\cdots 0)T'$$

$$\therefore \qquad \overline{(AG)'}=AG.$$

下面举一个实对称阵的例子．

$$设A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\ 求A^+.$$

先求出A的3个特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=3$.

再求出$\lambda=0$的两个线性无关的特征向量

$$\alpha_1=(-1,1,0)' \qquad \alpha_2=(-1,0,1)'$$

将它们正交单位化得

$$\beta_1=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)',\beta_2=\frac{1}{6}\left(-\sqrt{6},-\sqrt{6},2\sqrt{6}\right)'.$$

然后求出$\lambda=3$的特征向量

$$\alpha_3=(1,1,1),$$

单位化后得$\beta_3=\frac{1}{3}\left(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$. 再令$T=(\beta_1\beta_2\beta_3)$，即为正交阵．则

$$A=T\mathrm{diag}(0,0,3)T'$$

$$\therefore \qquad A^+=T\mathrm{diag}(0,0,\frac{1}{3})T'=\frac{1}{9}A.$$

4．减号逆是否唯一？

答　一般不唯一．例如$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，则所有逆减号全体：

$$A\{1\}=\left\{\begin{pmatrix}1&*\\ *&*\end{pmatrix}\middle|\ *为任意数\right\}$$

事实上

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&*\\ *&*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

从而可知A有无穷多个减号逆．

5．两矩阵A和B等价，集合$A\{1\}$与$B\{1\}$有什么关系？

答　设A和B均为$m\times n$矩阵．A,B等价，即存在m阶和n阶可逆阵P,Q，使得$A=PBQ$.

则

$$G\in A\{1\}\Longleftrightarrow QGP\in B\{1\}. \qquad (1)$$

事实上

$$G\in A\{1\}\Longleftrightarrow AGA=A$$

$$\Longleftrightarrow (PBQ)G(PBQ)=PBQ$$

$$\Longleftrightarrow B(QGP)B=B\Longleftrightarrow QGP\in B\{1\}.$$

6. 怎样求减号逆?

答 步骤如下:

1) 先求可逆阵P,Q,把A化成标准形.

设秩$(A)=r$,则$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,可以验证

$$PAQ\{1\}=\left\{\begin{pmatrix}E_r & D\\ C & F\end{pmatrix}\middle| \text{其中}D,C,F\text{可为任意矩阵}\right\} \qquad (1)$$

2) 由上面答疑辅导4和5,则

$$A\{1\}=\{Q\begin{pmatrix}E_r & D\\ C & F\end{pmatrix}P\mid \text{其中}D,C,F\text{可任意矩阵}\}$$

下面举个例子,设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}A & \vdots & E_2\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ E_3 & \vdots & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & \vdots & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & 0 & \vdots & & \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & & \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & & \end{pmatrix}$$

$$
\rightarrow \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\
2 & 4 & -1 & \vdots & 0 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & 1 & -2 & \vdots & & \\
0 & 1 & 0 & \vdots & & \\
0 & 0 & 1 & \vdots & &
\end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-3 & -7 & -2 & \vdots & & \\
0 & 1 & 0 & \vdots & & \\
2 & 4 & 1 & \vdots & &
\end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-3 & -2 & -7 & \vdots & & \\
0 & 0 & 1 & \vdots & & \\
2 & 1 & 4 & \vdots & &
\end{pmatrix}
$$

$$
\rightarrow \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & -1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-3 & -2 & -7 & \vdots & & \\
0 & 0 & 1 & \vdots & & \\
2 & 1 & 1 & \vdots & &
\end{pmatrix}
$$

则

$$P=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -7\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

$$PAQ=B,$$

其中$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，则可证

$$B\{1\}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ * & *\end{pmatrix}\Bigg|\ *\text{为任意}\right\}.$$

$$\therefore\ A\{1\}=\left\{Q\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ * & *\end{pmatrix}P\ \Bigg|\ *\text{为任意}\right\}.$$

7．减号逆什么时候唯一？

答　A的减号逆唯一的充要条件是A可逆.

设A为可逆阵，显然$A^{-1}\in A\{1\}$. 再任取$G\in A\{1\}$，$AGA=A$，用A^{-1}左乘，A^{-1}同时右乘上述等式，得$G=A^{-1}$. 从而$A\{1\}=\{A^{-1}\}$.

反之，设A是$n\times m$矩阵，先证$n=m$. 事实上，若$n\neq m$，则A必定与下列三种矩阵之一等价：

$$B_1=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ B_2=(E_r,0),\ B_3=\begin{pmatrix}E_r\\ 0\end{pmatrix}.$$

而B_1，B_2，B_3的减号逆都不唯一，从而A的减号逆不唯一，矛盾. 所以$m=n$，即A为方阵.

再证秩$(A)=n$，若秩$(A)=r<n$. 则A与B_1等价，A的减号逆也不唯一，矛盾. 所以秩$(A)=n$，A可逆.

8．广义逆与线性方程组是否有解之间有什么关系？

答　可以证明：线性方程组$AX=b$有解$\Longleftrightarrow b=AA^{+}b$.

事实上，设α为$AX=b$的解，则

$$b=A\alpha=(AA^+A)\alpha=AA^+(A\alpha)=AA^+b.$$

反之，设$b=AA^+b$，可知A^+b为$AX=b$的解.

9. 能不能用广义逆表出齐次方程$AZ=0$的解空间 W?

答 可以证明

$$W=\{(E-A^+A)Y \mid Y\text{为任意列向量}\} \tag{1}$$

事实上，令$M=\{(E-A^+A)Y \mid Y$为任意列向量$\}$. 任取

$$\alpha=(E-A^+A)\beta\in M,\text{则}$$

$$A\alpha=A(E-A^+A)\beta=(A-AA^+A)\beta=0$$

所以$\alpha\in W$，此即$M\subseteq W$.

反之，$\forall\alpha\in W$. 有$A\alpha=0$，两边左乘A^+

$$0=A^+A\alpha$$

$$\therefore \qquad \alpha=(E-A^+A)\alpha\in M$$

此即$W\subseteq M$. 故(1)式成立.

注 这个命题告诉我们，给定$AX=0$后，由A可求出A^+，然后由(1)式给出齐次方程组的一切解，只要让Y跑遍一切列向量.

另外，在高等代数中，只能给出齐次方程的解法步骤，不能给出解的公式. 而利用广义逆矩阵可以给出解的公式(1).

10. 齐次线方程组$AX=0$有唯一解的条件，能否由广义逆给出?

答 可以证明：

$$AX=0\text{有唯一解}\Longleftrightarrow E=A^+A. \tag{2}$$

设$AX=0$有唯一解0. 若$A^+A\neq E$，则$E-A^+A\neq0$，由上面(1)式知，存在$Y\neq0$而$(E-A^+A)Y=0$. 这与$AX=0$有唯一解矛盾.

反之，设$E=A^+A$. 则$E-A^+A=0$，由(1)式可知$W=\{0\}$

11. 有解的非齐次线性方程组$AX=b$的解集H，能否

用广义逆表出？

答　可以证明：

$$H=\{A^+b+(E-A^+A)Y \mid Y\text{为任意列向量}\}. \tag{1}$$

实际上，$AX=b$的解，可由$AX=b$的一个特解加遍$AX=0$的一切解而得出.

由本节答疑辅导8可知，$AX=b$有解时A^+b是它的一个特解. 而由上面答疑辅导9，从而可证得(3)式.

12. $AX=b$有唯一解的条件怎样？

答　可以证明：

$$AX=b\text{有唯一解}\Longleftrightarrow E=A^+A. \tag{4}$$

实际上

$$AX=b\text{有唯一解}\Longleftrightarrow AX=0\text{仅有零解}$$
$$\Longleftrightarrow E=A^+A.$$

13. 有解的非齐次方程组$AX=b$的解集H是否还有其它表达式？

答　还可证明：

$$H=\{Gb \mid G\in A\{1\}\} \tag{5}$$

设α为$AX=b$的解，则$A\alpha=b$. 令$M=\{Gb \mid G\in A\{1\}\}$

$\forall Gb\in M$，则

$$A(Gb)=AG(A\alpha)=(AGA)\alpha=A\alpha=b$$

所以$Gb\in H$. 即证$M\subseteq H$.

反之，取$AX=b$的任一解X_2，下证它可以表为Gb的形状.

设$rk(A)=r$，则存在可逆阵P^{-1}，Q^{-1}使

$$P^{-1}AQ^{-1}=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$b=AX_2=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QX_2 \tag{6}$$

令

$$QX_2=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, P^{-1}b=\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

由(6)式知

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}\neq 0$$

得到$Y_1=Z_1\neq 0, Z_2=0$.

令

$$G=Q^{-1}\begin{pmatrix} E_r & C \\ D & F \end{pmatrix}P^{-1} \tag{8}$$

其中C,D,F待定，使$X_2=Gb$.

取$C=0,F=0$. 若$X_2=Gb$,则

$$QX_2=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix}P^{-1}b=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

从而

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

这样 $Y_2=DZ_1$. 令

$Z_1=(a_1,\cdots,a_r)'$，因 $Z_1\neq 0$，设 $a_i\neq 0$. 再将D写成列向量

$$D=(D_1\cdots D_r)$$

$$DZ_1=a_1D_1+\cdots+a_rD_r$$

只要取

$$D_i=\frac{1}{a_i}Y_2,\quad D_j=0\ (j\neq i) \tag{11}$$

则

$$Y_2=DZ_1.$$

因此选 $C=0$，$F=0$，D 满足（11）式，即有(9)，(10)两式成立，从而有 $X_2=Gb$。

注 给出有解非齐次线性方程组 $AX=b$，可以先求出 $A\{1\}$，然后从中任取一个 A^-，则 A^-b 就是 $AX=b$ 的一个解，让 A^- 跑遍 $A\{1\}$，则 A^-b 跑遍 $AX=b$ 的一切解。

（三）题型归类

1. 计算广义逆

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，求 $A\{1\}$.

解

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ \hdashline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ \hdashline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$$
\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
\hdashline
1 & -1 & -1 & & & \\
0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}
$$

其中

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=P'.$$

故

$$A\{1\}=\left\{ P'\begin{pmatrix} 1 & C \\ D & F \end{pmatrix}P \,\middle|\, C_{1\times2},\ D_{2\times1},\ F_{2\times2}\text{为任意} \right\}.$$

2. 证明广义逆的性质

例 2 设 A 是实矩阵. 证明：1) $(A^{+})^{+}=A$；

2) $(A')^{+}=(A^{+})'$.

证 1) 由于彭诺斯方程中，A 与 A^{+} 的地位对称，因此 A 可以看成 A^{+} 的加号逆，即 $(A^{+})^{+}=A$.

2) 令 $X=(A^{+})'$，来验证 X 是 A 的加号逆，

$$A'XA'=A'(A^{+})'A'=(AA^{+}A)'=A'.$$

$$XA'X=(A^{+})'A'(A^{+})'=(A^{+})'.$$

$$(A'X)=A'(A^{+})'=(A^{+}A)'=A^{+}A$$

所以 $A'X$ 是对称阵，

即 $$(A'X)'=A'X.$$

类似有 $$(XA')'=XA'.$$

综上即证 $$(A')^{+}=(A^{+})'.$$

3．求矩阵方程的解

例 3 设 $AXB=0$ 的解集为 M，则

$$M=\{S-A^{+}ASBB^{+}\mid S \text{ 与 } X \text{ 是同型矩阵}\} \qquad (1)$$

证 令（1）式右端为 H．

$$\forall \alpha=S-A^{+}ASBB^{+}\in H，\text{则}$$

$$A(S-A^{+}ASBB^{+})B=ASB-ASB=0,$$

即 $\alpha\in M$．所以 $H\subseteq M$．

反之，任设 $\gamma\in M$，则 $A\gamma B=0$，从而 $A^{+}A\gamma BB^{+}=0$

则

$$\gamma=\gamma-A^{+}A\gamma BB^{+}\in H$$

此即 $M\subseteq H$，所以（1）式得证．

§3 广义特征值

（一）内容提要

1．设 A，B 都是 n 阶方阵，称行列式

$$f_{A,B}(\lambda)=|A-\lambda B| \qquad (1)$$

为 A 与 B 的广义特征多项式，它的根称为 A 与 B 的广义特征值．

2．设 A，B 都是 n 阶方阵，λ_0 是 A 与 B 的一个广义特征值，方程

$$(A-\lambda_0 B)x=0 \qquad (2)$$

的非零解，称为 A 与 B 关于 λ_0 的广义特征向量．

（二）答疑辅导

1．怎样求广义特征值与广义特征向量？

答 下面举一个例子，设

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

先求 A 与 B 的广义特征值与广义特征向量.

$$f_{A,B}(\lambda)=|A-\lambda B|=\begin{vmatrix}1-2\lambda & 2-\lambda\\ 2-\lambda & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+4)(\lambda-1).$$

$\lambda_1=-4$，$\lambda_2=1$ 为 A 与 B 的两个广义特征值.

再求广义特征向量. 当 $\lambda=-4$ 时，得齐次方程组

$$\begin{pmatrix}1-2(-4) & 2-(-4)\\ 2-(-4) & -(-4)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

得到线性无关解为 $\alpha'=(2,\ -4)$. 即关于 $\lambda=-4$ 的广义特征向量为 $k\alpha$ ($k\neq0$ 为任意常数).

当 $\lambda=1$ 时，得齐次方程组

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

求出线性无关解为 $\beta'=(1,\ 1)$. 即关于 $\lambda=1$ 的广义特征向量为 $l\beta$($l\neq0$ 为任意常数).

再求 B 与 A 的特征值

$$f_{B,A}(\lambda)=|B-\lambda A|=-(4\lambda+1)(\lambda-1)$$

则 $\lambda_3=-\frac{1}{4}$，$\lambda_4=1$ 为 B 与 A 的广义特征值.

由此例看出，当 A，B 给定时，A 与 B 的广义特征值及 B 与 A 的广义特征值一般是不同的.

2. 当 A，B 为 n 阶方阵时，它们的广义特征值的个数是否有限？

答　只要 $f_{A:B}(\lambda)$ 不是零多项式，则 A 与 B 的广义特征值的个数 $\leqslant n$.

3. 广义特征值与广义特征向量有什么关系式？

答　设 λ_0 为 A 与 B 的一个广义特征值，其相应广义特

征向量为 α，则

$$A\alpha=\lambda_0 B\alpha. \tag{1}$$

事实上，因为

$$(A-\lambda_0 B)\alpha=0$$

移项即证（1）式.

4. 什么条件可使广义特征值转化为普通特征值？

答　当 B 可逆时，求 A 与 B 的广义特征值 $f_{A;B}(\lambda)$ 可转化为求 AB^{-1} 的普通特征值，事实上

$$0=f_{A;B}(\lambda)=|A-\lambda B|=|AB^{-1}-\lambda E|\cdot|B|,$$

$$\therefore \qquad 0=|\lambda E-AB^{-1}|.$$

5. 若 A，B 能同时相似于上三角阵，它们的广义特征值与 A，B 各自的普通特征值，有什么关系？

答　设存在可逆阵 T，使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}BT=\begin{pmatrix} b_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix}$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 和 $b_1,\cdots,b_n$ 分别为 A 和 B 的全部特征值.

则

$$\begin{aligned}0=|A-\lambda B|&=|T^{-1}||A-\lambda B||T|\\&=|T^{-1}AT-\lambda T^{-1}BT|\\&=\begin{vmatrix} a_1-\lambda b_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n-\lambda b_n \end{vmatrix}\\&=(a_1-\lambda b_1)(a_2-\lambda b_2)\cdots(a_n-\lambda b_n)\end{aligned}$$

由此可见当 B 可逆时，A 与 B 的全部广义特征值为

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \cdots,\ \frac{a_n}{b_n}.$$

（三）题型归类

1. 计算广义特征值

例 1 设 A，B 均为 n 阶方阵，其广义特征值的个数是否可能小于 n？

解 可能，比如

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda B|=3\lambda-4$$

只有一个广义特征值为$\frac{4}{3}$.

2. 证明题

例 2 A，B 都是实对称阵，且 $B=CC'$ 为正定阵，C为实方阵. 则 $C^{-1}A(C')^{-1}$，全部普通特征值就是 A 与 B 的全部广义特征值.

证 B 正定，从而 C 可逆，$C^{-1}B(C')^{-1}=E$. 这时，因 $C^{-1}A(C')^{-1}$ 仍为实对称阵，存在正交阵 D 使

$$D(C^{-1}AC'^{-1})D^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

令 $T=(C')^{-1}D^{-1}$ 则 $T'=DC^{-1}$，从而

$$T'AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\qquad T'BT=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

由性质 5 知，A 与 B 的广义特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$. 而它们是 $C^{-1}A(C')^{-1}$ 的全部普通特征值.

§4 M矩阵

（一）内容提要

1．设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实方阵，著满足

$$a_{ij}>0\ (\geqslant 0) \qquad i,\ j=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

则称 A 为正（非负）矩阵，即元素全为正的实方阵称为正矩阵，元素全为非负的实方阵，称为非负矩阵．类似有负矩阵与非正矩阵．

2．n 阶实方阵 $A=(a_{ij})$ 满足下面三个条件称为 M 矩阵：

1) $a_{ii}>0 \qquad (i=1,2,\cdots n)$，

2) $a_{ij}\leqslant 0 \qquad (i\neq j,i,j=1,2,\cdots n)$，

3) A 的一切主子式都大于 0.

记为 $A\in M$．

3．满足上面条件 1)，2) 的矩阵 A，称为 L 矩阵，记为 $A\in L$.

（二）答疑辅导

1．什么叫方阵 A 的谱半径？

答 n 阶方阵 A 有 n 个特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，令

$$a=\max\{|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_n|\}$$

则称 a 为 A 的谱半径，记为 $\rho(A)$．换句话说，谱半径是 A 的特征值的模的最大值．

2．什么叫严格对角占优矩阵？

答 设 $A=(a_{ij})$为 n 阶复方阵，如果满足

$$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|=R_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

则称 A 为严格对角占优矩阵.

3．当 $\rho(A)<1$ 时，$E-A$ 是否可逆？

答 可逆．因为$\rho(A)<1$，1不是A的特征值，所以$|E-A|\neq 0$，$E-A$可逆．

还可证明(见张远达《线性代数原理》p. 406)

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots \tag{1}$$

4．设A是非负矩阵，当$\rho(A)<a$，$a\neq 0$时$aE-A$是否可逆？这时$(aE-A)^{-1}$是不是非负矩阵？

答 都对．因为当$\rho(A)<a$时，a不是A的特征值，$|aE-A|\neq 0$，$aE-A$可逆．其次

$$aE-A=a(E-B) \tag{2}$$

其中$B=\frac{1}{a}A$．由于$\rho(A)<a$，所以$\rho(B)<1$，则由上面(1)式

$$\left(E-\frac{1}{a}A\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{a^k}A^k, \tag{3}$$

$$\therefore \quad (aE-A)^{-1}=\frac{1}{a}(E-B)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{a^{k+1}}A^k. \tag{4}$$

另外，由于A是非负矩阵，$a>0$，由(4)式知$(aE-A)^{-1}$是非负矩阵．

5．严格对角占优矩阵是否可逆？

答 我们可以证明严格对角占优n阶方阵$A=(a_{ij})$的几个常用性质：

1) A可逆；

2) $D=\mathrm{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn})$可逆；

3) $\rho(B)<1$，其中$B=E-D^{-1}A$．

4) A的特征值的实部都大于0．

事实上 1) 设$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，其中$\alpha_k$为$A$的列向量．用反证法，若$|A|=0$，则$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性相关，存在一组不全为0的数$k_1,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$$

令 $l=\max\{|k_1|,\cdots,|k_n|\}$，不失一般，设 $l=|k_i|$，则

$$\alpha_i=\sum_{j\neq i}-\frac{k_j}{k_i}\alpha_j \tag{1}$$

由(1)有

$$a_{ii}=\sum_{j\neq i}\left(-\frac{k_j}{k_i}\right)a_{ij}. \tag{2}$$

$$\therefore\qquad |a_{ii}|\leqslant\sum_{j\neq i}\left|\frac{k_j}{k_i}\right|\cdot|a_{ij}|\leqslant\sum_{j\neq i}|a_{ij}|.$$

这与假设严格对角占优矛盾．所以 $|A|\neq 0$，A 可逆．

2）由 A 是严格对角占优，所以

$$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\geqslant 0$$

这样 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$．从而 D 可逆．

3）设 $B=(b_{ij})$，设 λ 为 B 的任一特 征 值，则由p.208圆盘定理知

$$|\lambda-b_{ii}|\leqslant\sum_{j\neq}|b_{ij}| \tag{3}$$

而

$$B=E-D^{-1}A$$

$$=\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{a_{n}}&&\\&\ddots&\\&&\frac{1}{a_{nn}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&-\frac{a_{12}}{a_{11}}&\cdots&-\frac{a_{1n}}{a_{11}}\\-\frac{a_{21}}{a_{22}}&0&\cdots&-\frac{a_{2n}}{a_{22}}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-\frac{a_{n1}}{a_{nn}}&-\frac{a_{n2}}{a_{nn}}&\cdots&0\end{pmatrix} \tag{4}$$

由(3)，(4)两式及 A 严格对角占优，则

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j \neq i} \left| -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \qquad \therefore \quad \rho(B) < 1.$$

4）此证明请参考张家驹的文章“M 矩阵的一些性质”（数学年刊，1980年1卷1）

6. 非负矩阵的谱半径有什么主要性质？

答　设 A 是非负矩阵，则

1）$\rho(A)$是 A 的一个特征值，即

$$|\rho(A)E - A| = 0.$$

2）B 是 A 的任意一个主子式，则

$$\rho(B) \leqslant \rho(A)$$

证明可参考：瓦格《矩阵迭代分析》一书（p. 29）

（三）题型归类

1. 证明 M 矩阵的等价条件

例 1　设 $A=(a_{ij})\in L$，我们可以证明下面一些条件是互相等价的：

1）$A \in M$；

2）A 的所有顺序主子式都大于 0；

3）A 可逆，且 A^{-1} 为非负矩阵；

4）若 B 是非负矩阵，使得 $A=bE-B$，则 $\rho(B)<b$，其中 $\rho(B)$为 B 的谱半径；

5）存在正列向量 x，使 Ax 也是正列向量；

6）存在主对角线元全为正的对角矩阵 D，使 ADe 为正列向量，其中 $e'=(1,1,\cdots 1)$；

7）若 $D=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots a_{nn})$，$B=E-D^{-1}A$ 则 $\rho(B)<1$；

8）A 的所有特征值的实部都大于 0.

证　1)$\Longrightarrow$2)是显然的.

2)$\Longrightarrow$3)，用数学归纳法来证.

当 $n=1$ 时，由 $a_{11}>0$，所以 A 可逆，且 A^{-1} 为非负矩阵，则结论成立.

归纳假设结论对 $n-1$ 成立. 设 A_{n-1} 为 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式，由 2)的假设知 A_{n-1}^{-1} 存在，且 A_{n-1}^{-1} 为非负矩阵. 设

$$A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{pmatrix}$$

那么

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\beta A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn}-\beta A_{n-1}^{-1}\alpha \end{pmatrix} \tag{3}$$

两边取行列式

$$|A|=|A_{n-1}|\cdot|a_{nn}-\beta A_{n-1}^{-1}\alpha|=|A_{n-1}|\cdot d$$

其中 $d=a_{nn}-\beta A_{n-1}^{-1}\alpha$，由假设 $|A|>0$，$|A_{n-1}|>0$，所以 $d>0$.

由(3)式得

$$A=\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\beta A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\therefore\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\beta A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

由于 $A\in L$，α，β 的分量都 $\leqslant 0$，又 A_{n-1}^{-1} 是非负矩阵，$\frac{1}{d}>0$，由(4)式不难验证 A^{-1} 为非负矩阵之积仍为非负矩阵.

3)$\Longrightarrow$5). 已知 A 可逆，A^{-1} 为非负矩阵，现在令 $x=$

$A^{-1}e$, $e'=(1,1,\cdots 1)$，从而 x 是非负列向量，且 $Ax=e$ 仍是正列向量.

5)$\Longrightarrow$6). 已知存在正列向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，使 Ax 为正列向量. 令 $D=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots x_n)$，则 D 为主对角线元全为正的矩阵，且 $ADe=Ax$ 为正列向量.

6)$\Longrightarrow$8). 设存在主对角元为正的对角阵 $D=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使 ADe 为正列向量.

$A\in L$，那么 $AD\in L$. 由 ADe 为正列向量，证明了 AD 为严格对角占优矩阵. 再由于每行乘一个正数不改变严格对角占优性，因此 $D^{-1}=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{x_1},\cdots,\frac{1}{x_n}\right)$为主对角线元为正的正对角阵，且 $D^{-1}AD$ 仍为严格对角占优矩阵. 由p.390答疑辅导5知$D^{-1}AD$ 的特征值的实部都大于零，而 A 的特征值与 $D^{-1}AD$ 的特征值相同. 从而 A 的特征值的实部都大于零.

8)$\Longrightarrow$4). $A\in L$，$a_{ii}>0(i=1,2,\cdots n)$，$a_{ij}\leqslant 0(i\neq j)$ 取定常数 $\lambda\geqslant\max\{a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}\}$，令 $\lambda E-A=B$. 可知 B 为非负矩阵. 由p.392答疑辅导6知$\rho(B)$为B的特征值，由于 $A=\lambda E-B$，所以

$$\begin{aligned}|(\lambda-\rho(B))E-A|&=|(\lambda-\rho(B))E-(\lambda E-B)|\\&=(-1)^n|\rho(B)E-B|=0,\end{aligned}$$

这样 $\lambda-\rho(B)$为 A 的特征值.再由 8)的假设 $\lambda-\rho(B)>0$ 即证 $\rho(B)<\lambda$.

4)$\Longrightarrow$7). $A\in L$，令 $D=\mathrm{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn})$，则 $D^{-1}=$ iag$\left(\frac{1}{a_{11}},\cdots,\frac{1}{a_{nn}}\right)$，$D^{-1}A\in L$. 令$B=E-D^{-1}A$,直接验证 B 是非负矩阵. $D^{-1}A=E-B$ 由 4)的假设知 $\rho(B)<1$.

7)$\Longrightarrow$3). 令 $D=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22}\cdots a_{nn})$，由 $A\in L$，则 B

$=E-D^{-1}A$ 为非负矩阵．由 7)假设知 $\rho(B)<1$，从而$|1\cdot E-B|\neq0$，即 $E-B$ 可逆，由p.390答疑辅导4知$(E-B)^{-1}$ 为非负矩阵．又

$$(E-B)^{-1}=(D^{-1}A)^{-1}=A^{-1}D,\quad A^{-1}=(E-B)^{-1}D^{-1}$$

$(E-B)^{-1}$ 为非负矩阵，$(E-B)^{-1}D^{-1}$ 也是非负矩阵，从而 A^{-1} 是非负矩阵．

我们已经完成了如下证明：

1)$\Longrightarrow$2)$\Longrightarrow$3)$\Longrightarrow$5)$\Longrightarrow$6)$\Longrightarrow$8)$\Longrightarrow$4)$\Longrightarrow$7)$\Longrightarrow$3)

这就证得 3)，4)，5)，6)，7)，8)互相等价．

7)$\Longrightarrow$1)． 任取 A 的一个 k 阶主子式，将元素从新编号后，设为

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix}$$

显然 $B\in L$．令 $D=\mathrm{diag}(b_{11},\cdots,b_{kk})$，$C=E-D^{-1}B$，由 7)的假设知 $\rho(C)<1$，即有

$$0\neq|E-C|=|D^{-1}B| \qquad \therefore \quad |B|\neq0,$$

此即 B^{-1} 存在．

另外，$B\in L$，B 看成条件 7)中之 A，它满足 7)，而 7)与 8)等价，．从而 B 的全部特征值的实部都大于 0．设 λ_1，λ_2，$\cdots\lambda_k$ 为 B 的全部特征值，当 λ_i 为实数时，则 $\lambda_i>0$．当 λ_i 为复数时，则 $\mathrm{Re}(\lambda_i)>0$，且 $\bar{\lambda}_i$ 也是 B 的特征 值，$\lambda_i\bar{\lambda}_i>0$．

$$\therefore \qquad |B|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k>0.$$

这就证明了 A 的 k 阶主子式$|B|>0$．此即 1)成立，完成了全部的证明．

§5 综合题

例 1 设 A,B 是 n 阶实方阵，P，Q 为 n 阶正交阵，且

$A=PBQ$. 证明：$A^+=Q'B^+P'$.

证 令 $X=Q'B^+P'$，因为

$$\begin{aligned}AXA&=(PBQ)(Q'B^+P')(PBQ)\\&=P(BB^+B)Q=PBQ=A,\\XAX&=(Q'B^+P')(PBQ)(Q'B^+P')\\&=Q'(B^+BB^+)P'=Q'B^+P'=X\\AX&=PBB^+P'\end{aligned}$$

所以$(\overline{AX})'=AX$. 类似可证

$$(\overline{XA})'=XA.$$

从而 X 为 A 的加号逆. 即证 $A^+=X=Q'B^+P'$.

例 2（云南大学研究生入学试题） 设 A，B 都是正定阵，证明

1）方程$|\lambda A-B|=0$ 的根都大于 0；

2）方程$|\lambda A-B|=0$ 的所有根等于 1 的充要条件是 $A=B$.

证 1）由p.255例9知，存在实可逆阵 T，使

$$T'AT=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n),\quad T'BT=\mathrm{diag}(b_1,\cdots,b_n)$$

其中 a_i，b_i 都大于 0 $(i=1,2,\cdots,n)$.

$$|T'|\cdot|\lambda A-B|\cdot|T|=|\lambda T'AT-T'BT|$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda a_1-b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda a_n-b_n\end{vmatrix}$$

从而求出 $\lambda A-B$ 的特征值为

$$\frac{b_1}{a_1},\ \cdots,\ \frac{b_n}{a_n}$$

都大于 0.

2）显然

$$|\lambda A-B|=0\text{ 的根等于 }1\Longleftrightarrow\frac{b_i}{a_i}=1\quad(i=1,2,\cdots n)$$

$$\Longleftrightarrow T'AT=T'BT\Longleftrightarrow A=B$$

例 3（江西师大，天津师大研究生入学试题） 若 B 是正定阵，$A-B$ 是半正定阵，则

1）$|A-\lambda B|=0$ 的所有根 $\lambda\geqslant1$.

2）$|A|\geqslant|B|$.

证 1）B 正定，存在可逆阵 T，使 $T'BT=E$.

$$|T'|\cdot|A-\lambda B|\cdot|T|=|T'|\cdot|(A-B)-(\lambda-1)B|\cdot|T|$$

$$=|T'(A-B)T-(\lambda-1)E|$$

因为 $A-B$ 半正定，则 $T'(A-B)T$ 也半正定，特征值非负，所以 $\lambda-1\geqslant0$，即 $\lambda\geqslant1$.

2）
$$0=|A-\lambda B|=|AB^{-1}-\lambda E|. \tag{1}$$

设 AB^{-1} 的全部特征根为 $\mu_1,\cdots,\mu_n$. 由(1)式知它也是广义特征值，并由上面证明知

$$\mu_i\geqslant1\ (i=1,2,\cdots,n)\ ,$$

$$|AB^{-1}|=\mu_1\cdots\mu_n\geqslant1,$$

$$\therefore\qquad |A|\geqslant|B|.$$

附　　录

北大《高等代数》（第二版）新增习题的解答

1. （[1]，p.207，28题）用两种方法求

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ \hdashline 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

的逆矩阵，

(1) 用初等变换；

(2) 按 A 中的划分，利用分块乘法的初等变换．（注意各小块矩阵的特点）

解　(1) 具体计算读者自己去做，可求出：

$$A^{-1}=\frac{1}{4}A.$$

(2) 令 $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，则 $A=\begin{pmatrix}B & B\\ B & -B\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}B & B & E & 0\\ B & -B & 0 & E\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}B & B & E & 0\\ 0 & -2B & -E & E\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}B & 0 & \frac{1}{2}E & \frac{1}{2}E\\ 0 & -2B & -E & E\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} E & 0 & \frac{1}{2}B^{-1} & \frac{1}{2}B^{-1} \\ 0 & E & \frac{1}{2}B^{-1} & -\frac{1}{2}B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{2}B$$

$$\therefore \quad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} B^{-1} & B^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1} \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} B & B \\ B & -B \end{pmatrix}=\frac{1}{4}A.$$

2. ([1]p. 207,29题) A, B 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵，证明

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}=|E_n-AB|=|E_m-BA|.$$

证

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & B \\ A & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E-AB \end{pmatrix},$$

两边取行列式得

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}=|E_n-AB|.$$

$$\begin{pmatrix} E & B \\ A & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -A & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E-BA & B \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

两边取行列式

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix}=|E_m-BA|.$$

3. ([1], p. 207, 30题) A, B 如上题，$\lambda\neq 0$，证明

$$|\lambda E_n-AB|=\lambda^{n-m}|\lambda E_m-BA|$$

证 见p.200例6 Sylvester 公式.

4. ([1],p.209, 12题) $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，则有 $m\times r$ 的列满秩矩阵 P 和 $n\times m$ 的行满秩矩阵 Q，使 $A=$

PQ.

证　见p.281答疑辅导1（满秩分解）.

5.（[1]，p.209,13题）A为$m\times n$复矩阵，$A=PQ$如上题，则

$$G=\bar{Q}'(Q\bar{Q}')^{-1}(\bar{P}'P)^{-1}\bar{P}'$$

为A的一个Moore-Penrose广义逆.

证　$AGA=(PQ)\bar{Q}'(Q\bar{Q}')^{-1}(\bar{P}'P)^{-1}\bar{P}'(PQ)$

$=PQ=A$.

$$GAG=[\bar{Q}'(Q\bar{Q}')^{-1}(\bar{P}'P)^{-1}\bar{P}']PQ[\bar{Q}'(Q\bar{Q}')^{-1}(\bar{P}'P)^{-1}\bar{P}']$$
$$=\bar{Q}'(Q\bar{Q}')^{-1}(\bar{P}'P)^{-1}\bar{P}'=G.$$

$$AG=P(\bar{P}'P)^{-1}\bar{P}'$$

$$(\overline{AG})'=(\bar{P}(P'\bar{P})^{-1}P')'=P(\bar{P}'P)^{-1}\bar{P}'=AG.$$

类似有

$$(\overline{GA})'=GA.$$

由定义可知G为A的一个Moore-Penrose广义逆.

6.（[1]，p. 209，14题）证明A的Moore-Penrose广义逆是唯一的.

证　先引入一个记号，令$\bar{A}'=A^R$.那么可以证明$(AB)^R=B^RA^R$. 下面再来证明本命题.

设G，H是两个Moore-Penrose逆，那么

$$G=(GA)G=A^RG^RG=(A^RH^RA^R)G^RG=HAA^RG^RG$$
$$=HAGAG=HAG=(HAH)AG=HH^RA^RAG$$
$$=HH^RA^R(G^RA^R)=HH^RA^R=HAH=H.$$

7.（[1],p.328，27题）求下列矩阵的最小多项式

1)
$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix};$$

2)
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

解

1) 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

的最小多项式为 $g(\lambda)$. 因为 $A^2=E$, 而 $A+E\neq 0$, $A-E\neq 0$, 所以 $g(\lambda)=\lambda^2-1$.

2) 设
$$B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

的最小多项式为 $g(\lambda)$. $|\lambda E-B|=\lambda^4$.

$g(\lambda)$只有4种可能: λ, λ^2, λ^3, λ^4. 由于 $A^2=0$, 因此 $g(\lambda)=\lambda^2$.

8. ([1], p. 398, 补充题1) 证明: 正交矩阵的实特征值为± 1.

解 由本书 p.350 例5知, 酉矩阵的特征值的模等于1, 正交阵是酉矩阵, 从而有实特征值, 只能是± 1.

9. ([1], p. 399, 13题) 设 A 是一个 n 级可逆复矩阵, 证明 A 可以分解成 $A=UT$, 其中 U 是酉矩阵, T 是一个上三角矩阵

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

其中对角线元素 $t_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 都是正实数．并证明这个分解是唯一的．

证 设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 A 的列向量，A 可逆，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关．用施密特方法正交化，令

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_2,\beta_1)}B_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_n=\alpha_n-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{(\alpha_n,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i\end{cases}\tag{1}$$

再将 β_i 单位化，令

$$\gamma_i=\frac{1}{|\beta_i|}\beta_i\ (i=1,2,\cdots,n)\tag{2}$$

则 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 为标准正交基．再从(1)，(2)解出 α_i 得

$$\begin{cases}\alpha_1=t_{11}\gamma\\ \alpha_2=t_{12}\gamma_1+t_{22}\gamma_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_n=t_{1n}\gamma_1+t_{2n}\gamma_2+\cdots+t_{nn}\gamma_n\end{cases}\tag{3}$$

其中 $t_{ii}=|\beta_i|>0$ 是正实数．将(3)写成矩阵形式为

$$A=(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\gamma_1\cdots\gamma_n)\begin{pmatrix}t_{11}&t_{12}&\cdots&t_{1n}\\0&t_{22}&\cdots&t_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&t_{nn}\end{pmatrix}$$

令 $U=(\gamma_1\cdots\gamma_n)$，$T=\begin{pmatrix}t_{11}&&*\\&\ddots&\\0&&t_{nn}\end{pmatrix}$

为上三角阵．故

$A=UT$，$UU'=U'U=E$，即 U 为酉矩阵.

再证分解是唯一的. 设若还有酉矩阵 U_1，T_1 也使 $A=U_1T_1=UT$. 那么 $U^{-1}U_1=TT_1^{-1}$.

不难证明酉矩阵之逆为酉矩阵，酉矩阵之积为酉矩阵（见p.364 例8）. 则 $U^{-1}U_1$ 为酉矩阵，从而 TT_1^{-1} 为酉矩阵.

另一方面，令 $T_2=TT_1^{-1}$，则 T_2 是上三角形，且为酉矩阵. T 与 T_1 的主对角元都为正实数，从而 T_1^{-1} 主对角线元也是正实数，T_2 的主对角线元也是正实数. 再设

$$T_2=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix},\quad T_2^{-1}=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & c_{nn} \end{pmatrix}$$

且 T_2^{-1} 的主对角线元也全为正实数. 由于 T_2 是酉矩阵，$\overline{T}_2'=T_2^{-1}$，则

$$\overline{T}_2'=\begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & & 0 \\ \bar{b}_{12} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ \bar{b}_{1n} & \cdots\cdots & \bar{b}_{nn} \end{pmatrix}=T_2^{-1}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

由(4)式可证 $b_{ij}=0(i\neq j)$. 所以 $T_2=\mathrm{diag}\,(b_{11},b_{22}\cdots b_{nn})$.

再由 T_2 为酉矩阵，$|b_{ii}|=1$，但 b_{ii} 为正实数，故 $T_2=E=TT_1^{-1}$，这样 $T=T_1$.

再由 $U^{-1}U_1=TT_1^{-1}=E$，所以 $U=U_1$. 从而得证分解是唯一的.

10.（[1],p.416,1题） V 是数域 P 上一个三维性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是它的一组基，f 是 V 上一个线性函数，已知

$$f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=1,\ f(\varepsilon_2-2\varepsilon_3)=-1,\ f(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=-3.$$

求 $f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)$.

解 由假设得

$$1=f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_2),$$
$$-1=f(\varepsilon_2)-2f(\varepsilon_3),$$
$$-3=f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_3).$$

由此可以解得 $f(\varepsilon_1)=-8$，$f(\varepsilon_2)=9$，$f(\varepsilon_3)=5$

$$f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)=x_1f(\varepsilon_1)+x_2f(\varepsilon_2)+x_3f(\varepsilon_3)$$
$$=-8x_1+9x_2+5x_3.$$

11．([1], p.416, 2题) V 及 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 同上题，试找出一个线性函数 f，使

$$f(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=f(\varepsilon_1-2\varepsilon_3)=0,\ f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=1.$$

解

$$0=f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_3)$$
$$0=f(\varepsilon_1)-2f(\varepsilon_3)$$
$$1=f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_2)$$

解得 $f(\varepsilon_1)=f(\varepsilon_3)=0$，$f(\varepsilon_2)=1$.

$$\forall x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3\in V$$
$$f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)=x_1f(\varepsilon_1)+x_2f(\varepsilon_2)+x_3f(\varepsilon_3)=x_2.$$

12．([1], p.416, 3题) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是线性空间 V 的一组基，f_1,f_2,f_3 是它的对偶基，

$$\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3,\ \alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ \alpha_3=\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

试证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 V 的一组基，并求它的对偶基(用 f_1,f_2,f_3 表出).

解 设

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)A,$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

因为 $|A|\neq0$，因此 α_1，α_2，α_3 线性无关，从而为 V 的一组

基.

设 g_1,g_2,g_3 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的对偶基. 那么

$$(g_1g_2g_3)=(f_1f_2f_3)(A')^{-1}$$

$$=(f_1f_2f_3)\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

即

$$g_1=f_2-f_3,\quad g_2=f_1-f_2+f_3,\quad g_3=-f_1+2f_2-f_3.$$

13. ([1], p.417 4题) 设 V 是一个线性空间, $f_1,f_2,\cdots f_s$ 是 V^* 中非零向量, 试证, 存在 $\alpha\in V$, 使

$$f_i(\alpha)\neq 0\quad i=1,2,\cdots,s.$$

证 对 s 用数学归纳法, 当 $s=1$时, f_1 是 V^* 的非零向量, 即 f_1 不是零函数. 存在 $\alpha\in V$, 使 $f_1(\alpha)\neq 0$. 即证当 $s=1$时, 命题成立.

归纳假设结论对 k 成立, 即存在 $\alpha\in V$, 使

$$f_i(\alpha)=a_i\neq 0,\ (i=1,2,\cdots,k). \tag{1}$$

如果 $f_{k+1}(\alpha)\neq 0$ 则命题证毕. 若 $f_{k+1}(\alpha)=0$. 但 f_{k+1} 不是零函数, 因此存在 $\beta\in$ 使V,

$$f_{k+1}(\beta)=b\neq 0 \tag{2}$$

设
$$f_i(\beta)=d_i\quad (i=1,2,\cdots,k) \tag{3}$$

可选数 $c\neq 0$, 使

$$a_i+cd_i\neq 0\quad (i=1,2,\cdots,k) \tag{4}$$

令 $\gamma=\alpha+c\beta$, $\gamma\in V$,

$$f_i(\gamma)=f_i(\alpha)+cf_i(\beta)=a_i+cd_i\neq 0\quad (i=1,2,\cdots,k)$$

$$f_{k+1}(\gamma)=f_{k+1}(\alpha)+cf_{k+1}(\beta)=cb\neq 0. \tag{5}$$

14. ([1], p.417, 5题)设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是线性空间 V 中非零向量, 证明有 $f\in V^*$ 使

$$f(\alpha_i)\neq 0 \quad i=1,2\cdots s.$$

证 因为$V\cong V^{**}$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是非零向量，则$\alpha_1^{**},\cdots,\alpha_s^{**}$是$V^{**}$中非零向量．又$V^{**}=(V^*)^*$，因此$\alpha_1^{**},\cdots,\alpha_s^{**}$是$(V^*)^*$上非零向量，由上题知$\exists f\in V^*$，使

$$\alpha_i^{**}(f)=0,\ (i=1,2,\cdots,s).$$

这样有

$$0=\alpha_i^{**}(f)=f(\alpha_i).\quad (i=1,2,\cdots,s).$$

15．([1], p.417.6题)　$V=P[x]_3$，对$p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2\in V$定义

$$f_1(p(x))=\int_0^1 p(x)cx$$

$$f_2(p(x))=\int_0^2 p(x)dx$$

$$f_3(p(x))=\int_0^{-1} p(x)dx$$

试证f_1,f_2,f_3都是V上线性函数，并找出V的一组基$p_1(x),p_2(x),p_3(x)$使f_1,f_2,f_3是它的对偶基．

证 先证$f_1\in V^*$．$\forall p(x),g(x)\in V$，$k\in P$，有

$$\begin{aligned}f_1(p(x)+g(x))&=\int_0^1 (p(x)+g(x))dx\\&=\int_0^1 p(x)dx+\int_0^1 g(x)dx\\&=f_1(p(x))+f_1(g(x)).\end{aligned}$$

$$f_1(kp(x))=\int_0^1 kp(x)dx=k\int_0^1 p(x)dx=kf_1(p(x)).$$

类似可证$f_2,f_3\in V^*$．即f_1,f_2,f_3是V上线性函数．

设$p_1(x),p_2(x),p_3(x)$为V的一组基，f_1,f_2,f_3是它的对偶基．

设$p_1(x)=c_0+c_1x+c_2x^2$，则

$$f_1(p_1(x))=1,\ f_2(p_1(x))=f_3(p_1(x))=0. \qquad (1)$$

由(1)式，算出积分后得

$$\begin{cases} c_0+\dfrac{1}{2}c_1+\dfrac{1}{3}c_2=1 \\ 2c_0+2c_1+\dfrac{8}{3}c_2=0 \\ -c_0+\dfrac{1}{2}c_1-\dfrac{1}{3}c_2=0 \end{cases} \qquad (2)$$

解得 $c_0=c_1=1$，$c_2=-\dfrac{3}{2}$，因此

$$p_1(x)=1+x-\frac{3}{2}x^2.$$

类似可得

$$p_2(x)=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}x^2,$$

$$p_3(x)=-\frac{1}{3}+x-\frac{1}{2}x^2.$$

$$\because \quad f_i(p_j(x))=\begin{cases}1, & j=i; \\ 0, & j\neq i.\end{cases}$$

因此 f_1, f_2, f_3 为 p_1, p_2, p_3 的对偶基.

16. ([1], p.417, 7题) 设 V 是一个 n 维欧氏空间，它的内积为(α,β)，对 V 中确定的向量 α，定义 V 上一个函数 α^*：

$$\alpha^*(\beta)=(\alpha,\beta)$$

1) 证明 α^* 是 V 上线性函数；

2) 证明 V 到 V^* 的映射：$\alpha\to\alpha^*$ 是 V 到 V^* 的一个同构映射.（在这个同构下，欧氏空间可看成自身的对偶空间.）

证 1) α^* 是 V 到实数域 R 上映射，因此 α^*是 V 上函数.

$$\forall \beta, \gamma \in V,\ k \in R,\ \text{则}$$

$$\alpha^*(\beta+\gamma)=(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$$
$$=\alpha^*(\beta)+\alpha^*(\gamma),$$
$$\alpha^*(k\beta)=(\alpha,k\beta)=k(\alpha,\beta)=k\alpha^*(\beta).$$

即证 α^* 是 V 上线性函数.

2) V^* 是 V 上一切线性函数全体，令

$$\varphi(\alpha)=\alpha^*,\ (\forall \alpha \in V)$$

则 φ 是 V 到 V^* 的映射.

先证 φ 是单射. 若 $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$，则 $\alpha^*=\beta^*$,

$$\alpha^*(\alpha)=(\alpha,\alpha)=\beta^*(\alpha)=(\alpha,\beta),$$
$$\alpha^*(\beta)=(\alpha,\beta)=\beta^*(\beta)=(\beta,\beta),$$
$$(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=(\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)-2(\alpha,\beta)=0,$$
$$\therefore \qquad \alpha=\beta.$$

再证 φ 为满射. 取 V 的一组标准正交基为 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，再设 $f_1,\cdots,f_n$ 为它们的对偶基.

$\forall f=k_1f_1+\cdots+k_nf_n\in V^*$. 令 $\alpha=k_1\varepsilon_1+\cdots+k_n\varepsilon_n$，则$\varphi(\alpha)=f$. 从而得证 φ 为满射.

因 $\varphi(\alpha)=\alpha^*$，下面证明 $f=\alpha^*$ 即可. 任取

$$\beta=l_1\varepsilon_1+\cdots+l_n\varepsilon_n\in V,$$

由 $f_1,\cdots,f_n$ 为 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基，所以

$$f(\beta)=l_1f(\varepsilon_1)+\cdots+l_nf(\varepsilon_n)=k_1l_1+\cdots+k_nl_n. \qquad (1)$$

$$\alpha^*(\beta)=(\alpha,\beta)$$
$$=\left(\sum_{i=1}^n k_i\varepsilon_i,\ \sum_{j=1}^n l_j\varepsilon_j\right)=k_1l_1+\cdots+k_nl_n \qquad (2)$$

由(1),(2)两式及 β 的任意性，故 $\varphi(\alpha)=\alpha^*=f$.

最后证明 φ 为同构映射. $\forall \alpha,\beta,\gamma\in V$，$k\in R$，则

$$(\alpha+\beta)^*(\gamma)=(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$$

$$=\alpha^*(\gamma)+\beta^*(\gamma),$$

$\therefore$ $$\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta).$$

$$(k\alpha)^*(\beta)=(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)=k\alpha^*(\beta)$$

$\therefore$ $$\varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha).$$

这样 $V\cong V^*$(既是线性空间同构，又是欧氏空间同构).

17. ([1], p.417, 8题) 设 σ 是 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换.

1) 证明：对 V 上的线性函数 f，$f\sigma$ 仍是 V 上线性函数.

2) 定义 V^* 到自身的映射 σ^* 为：

$$f\to f\sigma$$

证明 σ^* 是 V^* 上的线性变换.

3) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是它的对偶基，并设 σ 在 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n$ 下的矩阵为 A. 证明：σ^* 在 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 下的矩阵为 A'. (因此 σ^* 称做 σ 的转置映射).

证 1) $\forall\alpha\in V$，$f\sigma(\alpha)\in P$，$f\sigma$ 是 V 上函数.

$$\forall\alpha,\beta\in V,\ k,l\in P$$

$$f\sigma(k\alpha+l\beta)=f(k\sigma(\alpha)+l\sigma(\beta))$$
$$=kf\sigma(\alpha)+lf\sigma(\beta).$$

因此 $f\sigma$ 是线性函数.

2) $\forall f\in V^*$，由上面1)知 $\sigma^*(f)=f\sigma\in V^*$，因此$\sigma^*$是 V^* 到 V^* 变换.

$\forall f,g\in V^*,\ k\in P$

$$\sigma^*(f+g)=(f+g)\sigma=f\sigma+g\sigma=\sigma^*(f)+\sigma^*(g),$$
$$\sigma^*(kf)=(kf)\sigma=k(f\sigma)=k\sigma^*(f).$$

即证 σ^* 是 V^* 的线性变换.

3) 设 $A=(a_{ij})$，由假设知

$$\sigma\varepsilon_i = a_{1i}\varepsilon_1 + a_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + a_{ni}\varepsilon_n, \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (1)$$

设

$$\sigma^*(f_1,\cdots,f_n) = (f_1,\cdots,f_n)B,$$

其中 $B=(b_{ij})$，则

$$\sigma^*(f_j) = b_{1j}f_1 + b_{2j}f_2 + \cdots + b_{nj}f_n \qquad (2)$$

但 $\sigma^*(f_j) = f_j\sigma$.

$$f_j\sigma(\varepsilon_i) = f_j(a_{1i}\varepsilon_1 + \cdots + a_{ni}\varepsilon_n) = a_{ji} \qquad (3)$$

另一方面

$$\sigma^*(f_j)(\varepsilon_i) = (b_{1j}f_1 + \cdots + b_{nj}f_n)(\varepsilon_i) = b_{ij}, \qquad (4)$$

$\therefore \quad a_{ij} = b_{ji}$. （一切 i, j）

即证 $B=A'$.

18. ([1], P. 418, 9题) 设 V 是数域 P 上一个线性空间. $f_1,\cdots,f_k$ 是 V 上 k 个线性函数.

1) 证明下列集合 $W=\{\alpha\in V \mid f_i(\alpha)=0,\ 1\leqslant i\leqslant k\}$是$V$的一个子空间，$W$ 称为线性函数 $f_1,\cdots,f_k$ 的零化子空间.

2) 证明：V 的任一个子空间皆为某些线性函数的零化子空间.

证 1) $f_i(0)=0$，$1\leqslant i\leqslant k$，所以 $0\in W$，W 非空.

$\forall\alpha,\beta\in W$，$l\in P$，则对一切 $i(1\leqslant i\leqslant k)$

$f_i(\alpha+\beta)=f_i(\alpha)+f_i(\beta)=0$，$\therefore \alpha+\beta\in W$

$$f_i(l\alpha)=lf_i(\alpha)=0, \quad \therefore \ l\alpha\in W$$

即证 W 为 V 的子空间.

2) 设 V_1 为 V 的子空间. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k$ 为 V_1 的一组基，再扩大为 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_n$，定义

$$g(l_1\varepsilon_1+\cdots+l_n\varepsilon_n) = l_{k+1}\varepsilon_{k+1}+\cdots+l_n\varepsilon_n$$

则 V_1 是 g 的零化子空间.

19. ([1], P. 418, 10题) 设 A 是 P 上一个 m 级

矩阵．定义 $P^{m\times n}$ 上一个二元函数

$$f(X,Y)=\mathrm{tr}(X'AY) \qquad X,Y\in P^{m\times n}.$$

1）证明 $f(X,Y)$ 是 $P^{m\times n}$ 上的双线性函数；

2）求 $f(X,Y)$ 在基 $E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},E_{21},E_{22},\cdots,E_{2n},\cdots,E_{m1},E_{m2},\cdots,E_{mn}$ 下的度量矩阵．（E_{ij} 表示 i 行 j 列的元素为1，而其余元素为零的 $m\times n$ 矩阵）

证 1）$\forall X,X_1,X_2,Y,Y_1,Y_2\in P^{m\times n}$，$k_1,k_2\in P$

$$\begin{aligned}f(X,k_1Y_1+k_2Y_2)&=\mathrm{tr}[X'A(k_1Y_1+k_2Y_2)]\\&=k_1\mathrm{tr}X'AY_1+k_2\,\mathrm{tr}\,X'AY_2\\&=k_1f(X,Y_1)+k_2f(X,Y_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(k_1X_1+k_2X_2,Y)&=\mathrm{tr}(k_1X_1+k_2X_2)'AY\\&=k_1\,\mathrm{tr}\,X_1'AY+k_2\,\mathrm{tr}\,X_2'AY\\&=k_1f(X_1,Y)+k_2f(X_2,Y).\end{aligned}$$

即证 $f(X,Y)$ 是双线性函数．

2）为了计算 $f(E_{ij},E_{ks})$，先可算得

$$E'_{ij}AE_{ks}=\underset{(i)}{(j)\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots\cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}E_{ks}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & \cdots\cdots\cdots & 0\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} \;\cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\\ 0 & \cdots\cdots\cdots & 0\end{pmatrix}\underset{(s)}{\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots\cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}}(k)$$

$$=a_{ik}E_{js}$$

$$f(E_{ij},E_{ks})=\mathrm{tr}(E'_{ij}AE_{ks})=\begin{cases}0 & j\neq s\\ a_{ik} & j=s\end{cases}$$

设所求度量矩阵为 B 则

$$B=\begin{pmatrix} a_{11}E & a_{12}E & \cdots & a_{1n}E \\ a_{21}E & a_{22}E & \cdots & a_{2n}E \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}E & a_{n2}E & \cdots & a_{nn}E \end{pmatrix}$$

其中 E 为 n 级单位阵.

20. ([1], P. 418, 11题) 在 P^4 中定义一个双线性函数 $f(X,Y)$，对 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)$，$Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$.

$$f(X,Y)=3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3.$$

1) 给定 P_4 的一组基

$$\varepsilon_1=(1,-2,-1,0),\ \varepsilon_2=(1,-1,1,0)$$

$$\varepsilon_3=(-1,2,1,1),\ \varepsilon_4=(-1,-1,0,1).$$

求 $f(X,Y)$ 在这组基下的度量矩阵；

2) 另取一组基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)T$$

其中

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $f(X,Y)$ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的度量矩阵.

解 1) 设 $f(X,Y)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下度量矩阵为 $A=(a_{ij})$. 其中 $a_{ij}=f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$. 则

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 & -14 \\ -1 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & -11 & 1 & 14 \\ 15 & 4 & -15 & -2 \end{pmatrix}$$

2) 设 $f(X,Y)$ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下度量矩阵为 B，则

$$B=T'AT=\begin{pmatrix}-6 & 46 & 8 & 24\\ -18 & 26 & 16 & -72\\ -2 & -38 & 0 & 0\\ -6 & 86 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

21. ([1], P. 418, 12题) 设 V 是复数域上线性空间，其维数 $n\geqslant 2$，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 上一个对称双线性函数.

1) 证明 V 中有非零向量 ξ 使 $f(\xi,\xi)=0$;

2) 如果 $f(\alpha,\beta)$ 是非退化的，则必有线性无关的向量 ξ，η 满足

$$f(\xi,\eta)=1,\ f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0.$$

证 1) 由[1]P.413推论1存在V的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 使

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\ \beta=\sum_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i$$

有

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+\cdots+x_ry_r\qquad(0\leqslant r\leqslant n)\qquad(1)$$

$$\therefore\qquad f(\alpha,\alpha)=x_1^2+\cdots+x_r^2.\qquad(2)$$

若 $r=0$，则任意非零向量 α，都有 $f(\alpha,\alpha)=0$；若 $r\geqslant 0$，$f(\alpha,\alpha)=x_1^2$. 若 $r=1$，取 $\alpha=\varepsilon_2\neq 0$，$f(\alpha,\alpha)=0$；若 $r\geqslant 2$，则令 $\alpha=i\varepsilon_1+\varepsilon_2$，有

$$f(\alpha,\alpha)=i^2+1^2=0.$$

2) 若 $f(\alpha,\beta)$ 非退化则 (1) 式为

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

令

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_1+\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_2,\ \eta=\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_1-\frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon_2$$

$$f(\xi,\xi)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2=0=f(\eta,\eta)$$

$$f(\xi,\eta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=1$$

$\therefore\quad (\xi,\eta)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)B$，其中 $B=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$

可知 ξ,η 线性无关．

22．([1]，P．419，13题) 试证：线性空间 V 上双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 为反对称的充要条件是：对任意 $\alpha\in V$ 都有 $f(\alpha,\alpha)=0$.

证 先证必要性．因为 $\alpha\in V$，由定义有

$$f(\alpha,\alpha)=-f(\alpha,\alpha),\quad \therefore\quad f(\alpha,\alpha)=0.$$

再证充分性．任取 $\alpha,\beta\in V$，则

$$\begin{aligned}0=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)&=f(\alpha,\alpha)+f(\beta,\beta)\\&\quad+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)\\&=f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha).$$

23．([1]，P．419，14题) 设 $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上对称的或反对称的双线性函数．α,β 是 V 中两个向量，如果 $f(\alpha,\beta)=0$，则称 α,β 正交．再设 K 是 V 的一个真子空间，证明：对 $\xi\overline{\in}K$，必有非零的 $\eta\in K+L(\xi)$ 使 $f(\eta,\alpha)=0$ 对所有 $\alpha\in K$ 都成立．

证 1) 设 $f(\alpha,\beta)$ 是对称的双线性函数．把它看在 K 上也是．由[1]P．412存在 K 的一组基 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_t$，使 f 在这组基下度量矩阵为 $\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_t)$．再令

$$f(\xi,\varepsilon_i)=c_i\qquad(i=1,2,\cdots,t)$$

$$\eta=\frac{c_1}{d_1}\varepsilon_1+\cdots+\frac{c_t}{d_t}\varepsilon_t-\xi$$

(当有 $d_i=0$时，则删去 ε_i 这项)

则 $\eta\in K+L(\xi)$ 且对任意 $\alpha=m_1\varepsilon_1+\cdots+m_t\varepsilon_t\in K$，则有

$$f(\eta,\alpha)=f\Big(\frac{c_1}{d_1}\varepsilon_1+\cdots+\frac{c_t}{d_t}\varepsilon_1-\xi,\ m_1\varepsilon_1+\cdots+m_t\varepsilon_t\Big)$$

$$=c_1m_1+\cdots+c_tm_t-f(\xi,m_1\varepsilon_1+\cdots+m_t\varepsilon_t)=0.$$

2) 设 $f(\alpha,\beta)$ 为反对称的双线性函数.

i) 若对给定的 $\xi\overline{\in}K$，有 $\beta\in K$ 使 $f(\xi,\beta)\neq 0$. 则仿[1]P. 415定理6证明，令 $\varepsilon_1=\xi$，$\varepsilon_{-1}=\lambda\beta$ 使

$$f(\varepsilon_1,\varepsilon_{-1})=1$$

然后将 $\varepsilon_1,\varepsilon_{-1}$ 扩大为 $K+L(\xi)$ 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\cdots,\varepsilon_t\varepsilon_{-t}$，$\eta_1\cdots\eta_s$ 使

$$\begin{cases}f(\varepsilon_i,\varepsilon_{-i})=1 & i=1,2,\cdots,t\\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0 & i+j\neq 0\\ f(\alpha,\eta_k)=0 & \alpha\in K+L(\xi)\end{cases}$$

若 $s\neq 0$，取 $\eta=\eta_1$ 即可. 若 $s=0$，则 $K+L(\xi)$ 的基为 ε_1，$\varepsilon_{-1},\cdots,\varepsilon_t,\varepsilon_{-t}$. 令 $\eta=\varepsilon_{-1}$. 由于 $\xi=\varepsilon_1$，$K=L(\varepsilon_{-1},\varepsilon_2,\varepsilon_{-2},\cdots,\varepsilon_t,\varepsilon_{-t})$ 对任意 $\alpha\in K$.

$$f(\eta,\alpha)=0$$

ii) 若 $f(\xi,\beta)=0$ 对任意 $\beta\in K$. 则取 $\eta=\xi$ 即证.

24. ([1]，P. 419题) 设 V 与 $f(\alpha,\beta)$ 如上题，K 是 V 的一个子空间. 令

$$K^{\perp}=\{\alpha\in V\mid f(\alpha,\beta)=0,\ \forall\beta\in K\}$$

1) 试证：$K^{\perp}$ 是 V 的子空间，($K^{\perp}$ 称为 K 的正交补)

2) 试证：如果 $K\cap K^{\perp}=\{0\}$，则 $V=K+K^{\perp}$.

证 1) 对 $\forall\beta\in K$，有

$$f(0,\beta)=f(0\cdot 0,\beta)=0\cdot f(0,\beta)=0.$$

所以 $0\in K^{\perp}$，$K^{\perp}$非空.

$\forall\alpha_1,\alpha_2\in K^{\perp}$，$\forall k\in P$（数域），对 $\forall\beta\in K$，则

$$f(\alpha_1-\alpha_2,\beta)=f(\alpha_1,\beta)-f(\alpha_2,\beta)=0,$$

$$f(k\alpha_1,\beta)=kf(\alpha_1,\beta)=0.$$

所以 $\alpha_1-\alpha_2\in K^{\perp}$，$k\alpha_1\in K^{\perp}$. 则 $K^{\perp}$ 是 V 的子空间.

2) $K+K^{\perp}\subseteq V$ 是显然的. 若 $K=V$, 则定理证毕. 否则, 设 K 是 V 的真子空间. $\forall\gamma\in V$, 若 $\gamma\in K$ 则证毕. 若 $\gamma\overline{\in}K$, 则由上题存在非零的 $\eta\in K+L(\gamma)$ 使得

$$f(\eta,\alpha)=0,\ \forall\alpha\in K. \tag{1}$$

此即 $\eta\in K^{\perp}$. 但

$$\eta=\beta+k\gamma \qquad \beta\in K,\ k\in P, \tag{2}$$

显然 $k\neq0$. 因为若 $k=0$, 则 $\beta=\eta K\cap K^{\perp}=\{0\}$, 则 $\beta=\eta=0$, 矛盾. 故 $k\neq0$, 由 (2) 式

$$\gamma=\frac{1}{k}\beta+\frac{1}{k}\eta\in K+K^{\perp}.$$

所以 $V\subseteq K+K^{\perp}$. 证毕.

25. ([1], P.419, 16题) 设 V, $f(\alpha,\beta)$, K 同上题, 并设 $f(\alpha,\beta)$ 限制在 K 上是非退化的, 试证: $V=K\oplus K^{\perp}$ 的充要条件是 $f(\alpha,\beta)$ 在 V 上为非退化的.

证 先证必要性. 设

$$f(\alpha,\beta)=0 \quad 对任意\ \beta\in V \tag{1}$$

下证 $\alpha=0$.

$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$, 其中 $\alpha_1\in K$, $\alpha_2\in K^{\perp}$. $\forall\beta\in K$

$$0=f(\alpha,\beta)=f(\alpha_1,\beta)+f(\alpha_2,\beta)=f(\alpha_1,\beta)$$

由于在 K 上非退化, $\alpha_1=0$. $\alpha=\alpha_2\in K^{\perp}$.

另一方面 $(K^{\perp})^{\perp}=K$, $\forall\ \gamma\in K^{\perp}$ 由 (1) 式知

$$0=f(\alpha,\gamma)$$

所以 $\alpha\in(K^{\perp})^{\perp}=K$, 则 $\alpha\in K\cap K^{\perp}$, 但由假设 $K\cap K^{\perp}=\{0\}$故 $\alpha=0$.

再证充分性. 设 $\alpha_1\in K\cap K^{\perp}$, 若 $\alpha_1\neq0$, 则由 α_1 可扩充为 K 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$, 由于 $\alpha_1\in K^{\perp}$, 则

$$f(\alpha_1,\alpha_j)=0 \quad (j=1,2,\cdots,m)$$

无论 f 是对称或是反对称，也有 $f(\alpha_j,\alpha_1)=0$. 从而 f 在 K 的度量矩阵是退化的（即有一行，一列全为0），这与 f 在 K 上非退化矛盾. 所以 $\alpha_1=0$ 此即 $K\cap K^{\perp}=\{0\}$. 由上题得 $V=K+K^{\perp}$，从而 $V=K\oplus K^{\perp}$

26. （[1]，P.419，17题） 设 $f(\alpha,\beta)$ 是 n 维线性空间 V 上的非退化对称双线性函数，对 V 中一个元素 α，定义 V^* 中一个元素 α^*：

$$\alpha^*(\beta)=f(\alpha,\beta),\quad \beta\in V \tag{1}$$

试证：1）V 到 V^* 的映射 $\alpha\to\alpha^*$ 是一个同构映射；

2）对 V 的每组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，有 V 的唯一的一组基 $\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n'$ 使 $f(\varepsilon_i,\varepsilon_j')=\delta_{ij}$；

3）如果 V 是复数域上 n 维线性空间，则有一组基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$，使 $\eta_i=\eta_i'$ $i=1,2,\cdots,n$.

证 1）由[1]，P.412定理5，存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，使得 $f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=d_{ij}$，其中

$$d_{ij}=0\quad(i\neq j),\ d_{ii}\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$$

由（1）作出相应的 $\varepsilon_1^*,\cdots,\varepsilon_n^*\in V^*$. 考虑

$$k_1\varepsilon_1^*+\cdots+k_n\varepsilon_n^*=0 \tag{2}$$

由于

$$0=k_1\varepsilon_1^*(\varepsilon_1)+\cdots+k_n\varepsilon_n^*(\varepsilon_1)=k_1f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)=k_1d_{11}$$

即证 $k_1=0$. 类似可证 $k_2=\cdots=k_n=0$，即 $\varepsilon_1^*,\cdots,\varepsilon_n^*$ 线性无关. 从而为 V^* 的一组基. 由于映射 $\varphi:\alpha\to\alpha^*$ 保证基对应基，从而为双射.

任取 $\alpha,\beta,\gamma\in V$，则

$$\varphi(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^*,\ \varphi(\alpha)+\varphi(\beta)=\alpha^*+\beta^*$$

$$(\alpha+\beta)^*(\gamma)=f(\alpha+\beta,\gamma)$$

$$=f(\alpha,\gamma)+f(\beta,\gamma)=(\alpha^*+\beta^*)(\gamma)$$

$\therefore\quad (\alpha+\beta)^*=\alpha^*+\beta^*.$

类似可证 $(k\alpha)^*=k\alpha^*$. 因此 $\varphi: \alpha\to\alpha^*$是同构映射.

2）对 n 用数学归纳法，当 $n=1$ 时，f 非退化，$f(\varepsilon_1, \varepsilon_1)=d\neq 0$. 令 $\varepsilon_1'=\frac{1}{d}\varepsilon_1$ 即证结论成立.

归纳假设结论对 $n-1$ 成立，即由 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n-1}$ 可求 $\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_{n-1}'$，使

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j')=\delta_{ij}\qquad(i,j=1,2,\cdots,n-1)\tag{1}$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ 1 & (i\neq j)\end{cases}$$

再证 n 时. 令

$$\varepsilon_n'=\varepsilon_n-[f(\varepsilon_n,\varepsilon_1)\varepsilon_1'+\cdots+f(\varepsilon_n,\varepsilon_{n-1})\varepsilon_{n-1}'].\tag{2}$$

由（1）式可证

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_n')=0\qquad(i=1,2,\cdots,n-1)\tag{3}$$

由（3）可证

$$f(\varepsilon_n,\varepsilon_n')=c\neq 0.\tag{4}$$

否则，若 $f(\varepsilon_n,\varepsilon_n')=0$，再由（3）式，则

$$f(\varepsilon_n',\beta)=0\qquad\forall\beta\in V$$

但 f 非退化，所以 $\varepsilon_n'=0$，矛盾. 从而(4) 成立. 再用$\frac{1}{c}\varepsilon_n'$代替 ε_n'，仍记为 ε_n'. 则

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_n')=\delta_{in}\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{5}$$

由（1)，（5）即证结论对 n 也成立.

3）在复数域中，存在一组基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 使 f 在这组基下度量矩阵为单位阵，即

$$f(\eta_i,\eta_j)=\delta_{ij}$$

令 $\eta_1=\eta_1',\cdots,\eta_n=\eta_n'$ 则

$$f(\eta_i, \eta_j') = \delta_{ij}$$

27. ([1], P.419, 18题) 设 V 是对于非退化对称双线性函数 $f(\alpha, \beta)$ 的 n 维伪欧氏空间. V 的一组基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 如果满足

$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 1 \qquad i = 1, 2, \cdots, p;$$

$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = -1 \qquad i = p+1, \cdots, n;$$

$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \qquad i \neq j.$$

则称 V 为一组伪正交基. 如果 V 上的线性变换 σ 满足

$$f(\sigma\alpha, \sigma\beta) = f(\alpha, \beta) \quad \alpha, \beta \in V \tag{1}$$

则称 σ 为 V 的一个伪正交变换. 试证:

1) 伪正交变换是可逆的, 且逆变换也是伪正交变换;

2) 伪正交变换的乘积仍是伪正交变换;

3) 伪正交变换的特征值等于 1 或 -1;

4) 伪正交变换在伪正交基下的矩阵 T 满足

$$T'T = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

证 1) 由于 f 是非退化对称双线性函数, 存在一组基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$, 使 f 在基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下度量矩阵 $A = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 其中 $d_1 d_2 \cdots d_n \neq 0$.

设 σ 为 V 的伪正交变换. 因为

$$\sigma V = L(\sigma\varepsilon_1, \cdots, \sigma\varepsilon_n),$$

下证 $\sigma\varepsilon_1, \cdots, \sigma\varepsilon_n$ 线性无关. 事实上, 若

$$k_1\sigma\varepsilon_1 + \cdots + k_n\sigma\varepsilon_n = 0 \tag{2}$$

则

$$0=f(0,\sigma\varepsilon_1)=f(k_1\sigma\varepsilon_1+\cdots+k_n\sigma\varepsilon_n,\sigma\varepsilon_1)$$
$$=k_1f(\sigma\varepsilon_1,\sigma\varepsilon_1)+\cdots+k_nf(\sigma\varepsilon_n,\sigma\varepsilon_1)$$
$$=k_1f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)+\cdots+k_nf(\varepsilon_n,\varepsilon_1)=k_1d_1$$

故 $k_1=0$. 类似可证 $k_2=\cdots=k_n=0$. 则 $\sigma\varepsilon_1,\cdots,\sigma\varepsilon_n$ 线性无关，则 $\dim\sigma V=n$. 从而 $\sigma^{-1}(0)=\{0\}$. 即证 σ 是单射. 在有限维时，单射即为双射. 从而 σ 是可逆变换.

设 σ 的逆变换为 σ^{-1}. 则 σ^{-1}仍为线性变换，且

$$\sigma\sigma^{-1}=1_V,\quad \sigma^{-1}\sigma=1_V \tag{3}$$

对任意 $\alpha,\beta\in V$，有

$$f(\alpha,\beta)=f(1_V\alpha,1_V\beta)=f(\sigma\sigma^{-1}\alpha,\sigma\sigma^{-1}\beta)$$
$$=f(\sigma^{-1}\alpha,\sigma^{-1}\beta)$$

故 σ^{-1} 为伪正交变换.

2）设 σ，τ 为 V 的两个伪正交变换，则 $\tau\sigma$ 仍为 V 的线性变换，且对任意 $\alpha,\beta\in V$，有

$$f(\tau\sigma\alpha,\tau\sigma\beta)=f(\sigma\alpha,\sigma\beta)=f(\alpha,\beta)$$

即 $\tau\sigma$ 仍是伪正交变换.

3）设

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases} d_i\neq 0 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

设 λ 为 σ 的任一特征值，相应特征向量为

$$\alpha=k_1\varepsilon_1+\cdots+k_n\varepsilon_n\neq 0$$

则
$$f(\sigma\alpha,\sigma\alpha)=f(\lambda\alpha,\lambda\alpha)=\lambda^2f(\alpha,\alpha)$$
$$f(\alpha,\alpha)=f(\sigma\alpha,\sigma(\alpha))\qquad\therefore\quad \lambda^2f(\alpha,\alpha)=f(\alpha,\alpha)$$
$$f(\alpha,\alpha)=k_1^2d_1^2+\cdots+k_n^2d_n^2\neq 0$$

$\therefore\quad \lambda^2=1,\ \lambda=\pm1.$

4）设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的伪正交基，则

$$f(\alpha_i,\alpha_i)=1\qquad i=1,2,\cdots,p$$

$$f(\alpha_i,\alpha_i)=-1 \qquad i=p+1,\cdots,n$$

$$f(\alpha_i,\alpha_j)=0 \qquad (i\neq j)$$

设 $\sigma(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)T$，其中 $T=(t_{ij})$ 为 n 阶方阵.

则

$$\sigma\alpha_1=t_{11}\alpha_1+t_{21}\alpha_2+\cdots+t_{n1}\alpha_n$$

$$1=f(\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_1)=t_{11}^2+\cdots+t_{p1}^2-(t_{p+1\,1}^2+\cdots+t_{n1}^2)$$

$$0=f(\sigma\alpha_1,\sigma\alpha_2)=t_{11}t_{12}+\cdots+t_{p1}t_{p2}-(t_{p+1;1}\,t_{p+1;2}+\cdots+t_{n1}t_{n2})$$

……………………

$$-1=f(\sigma\alpha_{p+1},\sigma\alpha_{p+1})=t_{1\,p+1}^2+\cdots+t_{p;p+1}^2-(t_{p+1;p+1}^2+\cdots+t_{np}^2)$$

……………………

$$-1=f(\sigma\alpha_n,\sigma\alpha_n)=t_{1n}^2+\cdots+t_{pn}^2-(t_{p+1;n}^2+\cdots+t_{nn}^2)$$

$$T'T=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}.$$

参 考 文 献

［1］ 北京大学，高等代数（第二版），高等教育出版社，1988.

［2］ 屠伯壎，线性代数方法导引，复旦大学出版社，1986.

［3］ 张远达，线性代数原理，上海教育出版社，1980.

［4］ 熊全淹、叶明训，线性代数（第三版），高等教育出版社，1987.

［5］ 张禾瑞、郝鈵新，高等代数（第三版），高等教育出版社，1984.

［6］ 周伯壎，高等代数，人民教育出版社，1978.

［7］ 毛纲源，线性代数解题方法和技巧，湖南大学出版社，1987.

[8] 蒋尔雄、高坤敏、吴景坤，线性代数，人民教育出版社，1979.
[9] 钱吉林、蔡剑芳、李桃生，高等代数研究生试题集锦，湖北科学技术出版社，1987.
[10] 蔡剑芳、钱吉林、李桃生，高等代数综合题解，湖北科学技术出版社，1986.
[11] 王志雄，美苏大学生数学竞赛题解，福建科学技术出版社，1985.
[12] 丸山滋弥，日本理工科大学硕士研究生入学数学试题集（田根宝译），西南交通大学出版社，1987.
[13] 王芝田、李立鹏、钱吉林、汪志文，怎样考好高等数学，湖北教育出版社，1986.
[14] 熊廷煌、陈良植等，高等代数简明教程，湖北教育出版社，1987.
[15] 钱吉林、李照海，矩阵及其广义逆，华中师范大学出版社，1988.
[16] 王萼芳，高等代数，上海科学技术出版社，1981.
[17] 李世雄，代数方程与置换群，上海教育出版社，1981.
[18] 阿·伊·柯斯特利金，代数学引论（上册），高等教育出版社，1988.
[19] 阿·伊·柯斯特利金，代数学引论（下册），高等教育出版社，1988.
[20] J.H.威尔金森，代数特征值问题，科学出版社，1987.
[21] 倪国熙，常用矩阵理论和方法，上海科学技术出版社，1984.
[22] 钱吉林，关于 Bellman 不等式的注记，华中师范大学学报（自然科学版），1986，第4期.
[23] 代立新、曾祥金、胡友恩等，高等代数典型习题解议，武汉工业大学出版社，1988.
[24] Bellman, R. Introduction to Matrix Analysis, MCGR-AW—HIll 1970.
[25] 须田信英 児玉慎三 池田雅夫，自动控制中的矩阵理论，科学出版社，1979
]26] Ben-Isarel and Greville, T.N.E, Generaliged Inverse: Theory and Applications, Willy—Interscience, New York, 1973.
[27] Rao, C. and Mitra, S.K., Generalized Inverse of Matrices and Its Applieations Wiley-Interscience, New york, 1971.

[28] 赵德修，线性代数，高等教育出版社，1990.
[29] A.N.马力茨夫，线性代数基础，高等教育出版社，1957.
[30] 经济管理应用数学编委会，线性代数，成都科技大学出版社，1989.
[31] 陈良植，行列式的几种等价定义，华中师范大学学报(自然科学版)，1981. 第2期.
[32] 蓝以中，线性代数引论，北京大学出版社，1981.
[33] 张家驹，M矩阵的一些性质，数学年刊，1980，1卷1.
[34] 钱吉林、廖晓昕，矩阵方程$A'X+XB=C$的新解法及应用，华中师范大学学报（自然科学版）1986，第2期.
[35] 周兆麟、余尚智、张立锐、徐淑娟，高等数学基础(2)——线性代数，湖北科学技术出版社，1986.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝高等代数方法导论
作者＝钱吉林　　陈良植主编
页数＝４２３
ＳＳ号＝１１１７７９３０
出版日期＝１９９０年０９月第１版